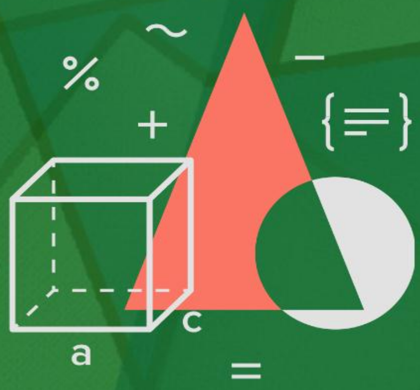
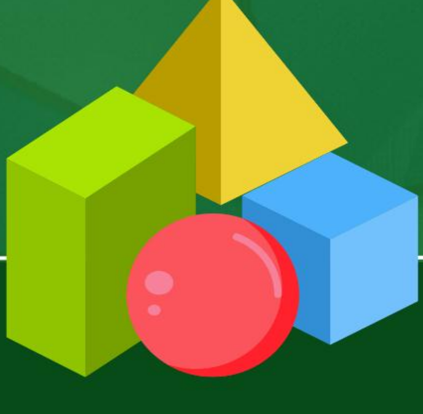


ई - पुस्तक

क्षेत्रफळ - घनफळ संकल्पना



लेखक

प्रा: दिगंबर सळगर

क्षेत्रफळ,घनफळ :संकल्पना

हे गणिताच्या संकल्पना सोप्या पद्धतीने समजावणारे पुस्तक ई साहित्य प्रतिष्ठानच्या वाचकांना ई स्वरुपात विनामूल्य उपलब्ध करून दिल्याबद्दल ई साहित्य प्रतिष्ठान लेखक व प्रकाशक श्री दिगंबर सलगर यांचे आभारी आहे. त्यांची थोदक्यात माहिती खाली देत आहोत.

श्री. सलगर दिगंबर काशिनाथराव

शिक्षण: एम.एससी.(रसायनशास्त्र),एम.एड.

अध्यापन अनुभव: सेवादास उच्च माध्यमिक; वसंतनगर, ता.मुखेड, जिल्हा:नांदेड,येथे उच्च माध्यमिक स्तरावर रसायनशास्त्र विषयाच्या अध्यापनाचा 31 वर्षे अनुभव.

आवड : निसर्गाची खूप आवड आहे.ह्या अनुषंगाने विविध वृक्ष, विविध पशू -पक्षी इ.चे खूप आकर्षण आहे. 21व्या शतकात सर्व क्षेत्रात क्रांतिकारी बदल किंवा स्थित्यंतरे झाली आहेत. ह्या अनुषंगाने Pinterest समाज माध्यमातून ई-छंद झाले आहेत. Pinterest वर विविध देशांतील टपाल तिकीटे आणि अन्य काही विषयांशी निगडीत अप्रतिम छायाचित्रे शेअर केली आहेत

या पुस्तकावरील आपले अभिप्राय श्री दिगंबर सलगर यांना 9423437196 या क्रमांकावर कळवावे.

धन्यवाद

सुनीळ सामंत

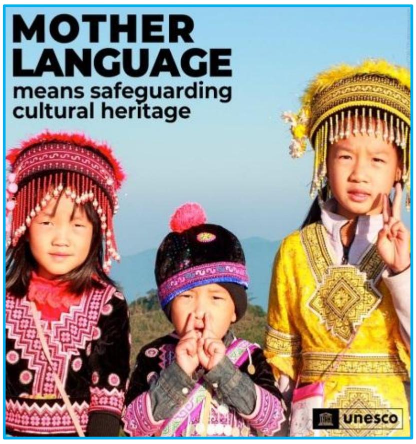
टीम ई साहित्य

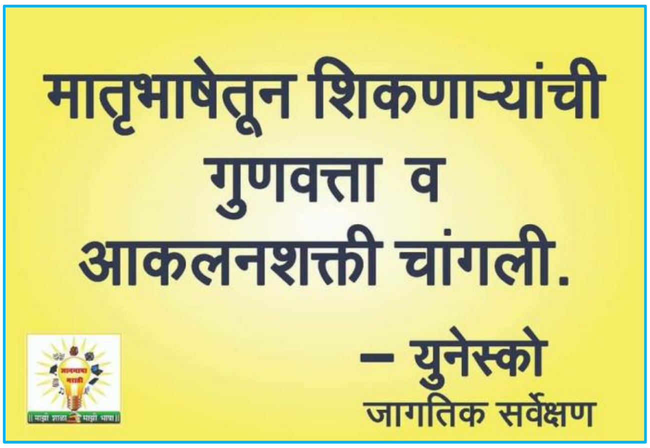
esahity@gmail.com

www.esahity.com

Whatsapp: 99877 37237

ई प्रकाशन तिथी- पंधरा जून दोनहजार चौवीस





फेसबुक व ट्विटर (Twiter/X) वरुन साभार

हे ई-पुस्तक

आदरणीय

स्व.मा.आमदार कर्मवीर किशनरावजी राठोड

तसेच

स्व. मा. आमदार गोविंदरावजी राठोड

ह्यांच्या पावन स्मृतीस समर्पित.

लेखकाचे मनोगत

शालेय स्तरावर गणित विषयामध्ये क्षेत्रफळ आणि घनफळ ह्या संकल्पनांना अनन्यसाधारण महत्त्व आहे. हा संदर्भ विचारात घेऊन प्रस्तुत ई-पुस्तकामध्ये ह्या संकल्पना खूपच सुलभ भाषेत, सुलभ स्वरूपात स्पष्ट केल्या आहेत. माध्यमिक व उच्च माध्यमिक शिक्षक क्षमता वृद्धी प्रशिक्षण 2024 साठी विकसित शिक्षक मार्गदर्शिकेमध्ये (प्रथम आवृत्ती फेब्रुवारी 2024) नावीन्यपूर्ण अध्यापनशास्त्र प्रकरणामध्ये 'मुक्त शैक्षणिक संसाधना' बाबत (Open Educational Resources) माहिती देण्यात आली आहे. ह्या अनुषंगाने एप्रिल 2023 मध्ये प्रकाशित पुस्तक लॉग वर आधारित कॅल्क्युलेशन्स (पुस्तक डाऊनलोड करण्यासाठी लिंक https://bit.ly/LogBasedCalculationbyDKSv2 किंवा Twitter.com/dksalgar अकाउंट वर Pined tweet आहे.) तसेच प्रस्तुत ई-पुस्तक पण मुक्त शैक्षणिक संसाधने आहेत. कारण ह्या संसाधनांच्या उपयुक्ततेच्या अनुषंगाने ही पुस्तके दर्जेदार आहेत, सहज उपलब्ध आहेत. तसेच औपचारिक-अनौपचारिक शिक्षण पद्धतीमधील अंतर कमी करतात.

ही पुस्तके विकसित करत असताना, मुख्य लक्ष्य ‘स्वयंअध्ययन’ आहेच. ह्या सोबतच ही पुस्तके शिक्षकांना अध्यापनातही नक्कीच उपयुक्त ठरतील.

अध्यापन प्रक्रियेमध्ये ‘अध्ययन अनुभूती’ अत्यंत महत्त्वपूर्ण आहेत. अध्ययन अनुभूती आशयाशी निगडीत तसेच उद्दिष्टांशी निगडीत असावयास हव्या. अध्ययन अनुभूती समृद्ध, अर्थपूर्ण असल्या पाहिजेत. ह्यासोबतच गणित अध्यापनासाठी उद्गामी पद्धतीचा वापर करून गणित विषयाचे प्रायोगिक स्वरूप दर्शवणे शक्य आहे. ह्या अनुषंगाने शिक्षक अध्यापनात भौतिक प्रतिकृती, आकृत्या, आलेखाच्या सहाय्याने गणन ...... इ. वापरु शकतात. हे संदर्भ साकल्याने विचारत घेऊन प्रस्तुत ई-पुस्तकामध्ये क्षेत्रफळ तसेच घनफळ संकल्पनांचे स्पष्टीकरण खूपच सुलभ स्वरुपात केले आहे. ह्यामुळे प्रस्तुत पुस्तकाच्या सहाय्याने क्षेत्रफळ, घनफळ ह्या संकल्पनांचे आकलन सुलभ होईल.

प्रस्तुत ई-पुस्तकाचे मुखपृष्ठ खूपच अप्रतिम स्वरूपात आदरणीय कल्पेश परब साहेबांनी (मुंबई) उपलब्ध केले आहे, त्याबद्दल त्यांचे मन:पूर्वक आभार. तसेच प्रा. सचिन विठ्ठलराव क्यादरकुंटे (मुखेड) यांनी ह्या पुस्तकाचे टंकलेखन केले आहे त्याबद्धल सरांचे मन:पूर्वक आभार व ज्ञात-अज्ञात व्यक्ती, ज्यांचं ह्या ई-पुस्तक विकसन प्रक्रियेत मोलाचं सहकार्य लाभले, त्या सर्वांचे मन:पूर्वक आभार.

दि. १० मे २०२४
अक्षय्य तृतीया

प्रा. दिगंबर सलगर

अनुक्रमणिका

Contents

1. क्षेत्रफळ : संकल्पना

1.1 प्रस्तावना

भूमितीमध्ये विविध द्विमितीय बहुभुजाकृतीचे क्षेत्रफळ, त्या विशिष्ट बहुभुजाकृतीच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र वापरून काढले जाते. ह्या प्रकरणामध्ये क्षेत्रफळाच्या संकल्पनेबाबतची सैद्धांतिक (Theorotical) स्वरुपातील माहिती खूपच सुलभ भाषेत, सुलभ स्वरुपात स्पष्ट केली आहे. ह्या माहितीच्या आधारे, 'क्षेत्रफळ' ही संकल्पना अधिकाधिक सुस्पष्ट स्वरुपात आकलन (Understanding) होईल.

1.2 क्षेत्रफळ म्हणजे काय ?

क्षेत्रफळ ही एखाद्या पृष्ठाच्या सीमाबद्ध भागाचे द्विमितीय आकारमान दर्शवणारी भौतिक राशी आहे.

किंवा

एखाद्या प्रतलामध्ये रेखाटन केलेल्या बंदिस्त आकृतीने व्यापलेल्या जागेला, त्या आकृतीचे क्षेत्रफळ असे म्हणतात.

प्रतलातील अशा बंदिस्त स्वरुपाच्या आकृत्या उदा. त्रिकोण, चौकोन, पंचकोन, षटकोन, वर्तुळ, अर्धवर्तुळ, विविध बहुभुजाकृती,….. इ. द्विमितीय असतात. म्हणजेच त्या आकृतीमध्ये लांबी दोन वेळा किंवा लांबी आणि रूंदी असते. महत्त्वमापन पाठामध्ये देण्यात आलेल्या विविध बहुभुजाकृतींच्या क्षेत्रफळांची सूत्रे देण्यात आली आहेत. त्यापैकी काही सूत्रे खालीलप्रमाणे आहेत.

i. आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

ii. चौरसाचे क्षेत्रफळ = (बाजू)^2

iii. समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$(समांतर बाजूच्या लांबीची बेरीज) × लंबांतर

iv. समभुज चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

(d_1 , d_2) हे कर्ण (diagonals) आहेत.

v. त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × पाया × उंची

vi. समभुज त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ = (बाजू)^2 $\frac{\sqrt{3}}{4}$

vii. वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = πr^2

(r = वर्तुळाची त्रिज्या)

viii. अर्धवर्तुळाचे क्षेत्रफळ = $\frac{\pi r2}{2}$

ix. सुसम षटकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (बाजू)^2

x. सुसम सप्तकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{7}{4}$ (बाजू)^2 $\cot\left(\frac{180^\circ}{7}\right)$

xi. सुसम अष्टकोनाचे क्षेत्रफळ = 2 (बाजू)^2 $(1+\sqrt{2})$

'कोणत्याही आकृतीच्या क्षेत्रफळांच्या सूत्रामध्ये पूर्णांक-अपूर्णांक स्वरुपातील सहगुणक वगळता आकृतीच्या भूजांचे संदर्भ अर्थात भुजांची लांबी किंवा मापे एककासह गुणाकार स्वरुपात दोन वेळा पाहायला मिळतात.

वर्तुळ किंवा अर्धवर्तुळाच्या क्षेत्रफळांच्या सूत्रामध्येही 'π' ह्या स्थिरांकासोबतच (त्रिज्या)^2 किंवा 'त्रिज्या × त्रिज्या' असे संदर्भ आहेत.

विविध बहुभुजाकृतीच्या क्षेत्रफळांच्या सूत्रातील हा समान स्वरूपाचा किंवा सामाईक भाग; अर्थात भुजांची लांबी एककांसह गुणाकार स्वरुपात दोन वेळा आहे. ह्या अनुषंगाने आकृतीच्या भुजांचे जे एकक वापरले आहे; उदा. सेंटिमीटर किंवा सेमी, हा संदर्भ विचारात घेऊन.....

भुजा सेमी × भुजा सेमी

(भुजा × भुजा) सेमी ^{1} × सेमी ^{1}

(भुजा × भुजा) सेमी $^{1+1}$

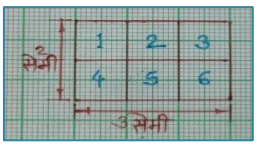
(भुजा × भुजा) सेमी ^{2} किंवा चौरस सेंटिमीटर सेमी^{2} हे शब्दात वर्ग सेंटिमीटर किंवा चौरस सेंटिमीटर किंवा वैकल्पिक अर्थात पर्यायी स्वरुपात चौरस सेंटिमीटर (चौ. सेमी) असेही लिहितात.

गणिती भाषेत चौरस सेंटिमीटर (चौसेमी) आणि वर्ग सेंटिमीटर (सेमी^{2}); हे समान अर्थी आहेत. ह्या अनुषंगाने क्षेत्रफळाचे मापन हे वर्ग किंवा चौरस आकृतीच्या स्वरुपात केले जाते.

[वरील सूत्रामध्ये गुणाकारात पाया समान असताना घातांकाची बेरीज केली जाते, ह्या नियमांनुसार लांबीचे एकक सेंटिमीटर, सेमी^{1} × सेमी^{1} = सेमी $^{1+1}$ = सेमी^{2} हे प्राप्त होते. येथे पहिल्या ओळीमध्ये ह्या संदर्भात सेमी × सेमी असे लिहिले आहे, कारण कोणतीही संख्या किंवा चलाचा घातांक 1 असेल तर तो न लिहिण्याचा संकेत आहे.]

हे अधिकाधिक सुलभ स्वरुपात स्पष्ट करण्यासाठी एका आयताचे क्षेत्रफळ विचारात घेऊ.

खालील आयताची लांबी 3 सेमी आणि रुंदी 2 सेमी आहे.



आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

= 3 सेमी × 2 सेमी

= 6 सेमी^{2} किंवा चौसेमी

'वर्ग' ह्या शब्दाचे अर्थ.

'वर्ग' ह्या शब्दाचे काही अर्थ खालीलप्रमाणे आहेत.

गणित विषयातील घातांक पाठामध्ये कोणत्याही संख्येचा घातांक 2 असताना; हे वाचन 'त्या संख्येचा वर्ग' असे केले जाते. हे वाचन संख्येचा घातांक दोन आहे असे केले जात नाही.

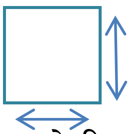
वर्ग म्हणजे चौरस, चौकोनाचा एक प्रकार आहे. हे दोन समानार्थी शब्द आहेत. ह्या चौकोनाचे चारही कोन काटकोन किंवा 90^0 मापाचे असतात आणि चारही भुजांची लांबी समान असते.

समाज शास्त्रामध्ये विविध समाज घटक ह्या अर्थाने 'वर्ग' हा शब्द वापरला जातो. उदा. मध्यम वर्ग, सधन वर्ग, निम्न मध्यम वर्ग इ.

वर्ग शब्दाचा आणखी एक अर्थ, शाळेतील एखादा वर्ग उदा. इ. 5 वी चा वर्ग, 8 वी चा वर्ग इ.

1.3 क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक (Standard Unit of Area)

खालील आकृतीत चौरसाची बाजू 1 सेमी आहे, ह्या चौरस आकृतीमुळे प्रतलातील व्यापलेली जागा 1 चौरस सेंटिमिटर (1 चौसेमी) किंवा 1 सेमी^{2} अर्थात 1 सेमी बाजू असलेला चौरस किंवा वर्ग; हे क्षेत्रफळाच्या मापनासाठी प्रमाणित एकक वापरतात.



1 सेमी

1 सेमी

चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू

= 1 सेमी × 1 सेमी

= 1 सेमी ^{2} किंवा चौसेमी

आकृतीच्या भुजांची मापे ज्या एककामध्ये दिली आहेत. त्या एककानुसार क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक खालील सारणीमध्ये दिले आहे.

आकृतीच्या भुजांच्या लांबीचे एकक	क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक
मिलिमीटर	1 चौरसमिलिमीटर किंवा 1 मिमी^{2}
सेंटिमीटर	1 चौरस सेंटिमीटर किंवा 1 सेमी^{2}
डेसीमीटर	1 चौरस डेसीमीटर किंवा 1 डेसिमी^{2}
मीटर	1 चौरस मीटर किंवा 1मी^{2}
डेकामीटर	1 चौरस डेकामीटर किंवा 1 डेकामी^{2}
हेक्टोमीटर	1 चौरस हेक्टोमीटर किंवा 1 हेक्टोमी^{2}
किलोमीटर	1 चौरस किलोमीटर किंवा 1 किमी^{2}

क्षेत्रफळांच्या प्रमाणित एककामुळे क्षेत्रफळाचे मापन सर्वत्र अचूक होते.

क्षेत्रफळाच्या व्यापकतेनुसार भुजांच्या लांबीचे एकक वापरले जाते. ह्या अनुषंगाने प्रमाणित एकक संदर्भात क्षेत्रफळ दिले जाते. उदा. विविध देशांचे किंवा प्रदेशाचे क्षेत्रफळ 'चौरस किलोमीटर' मध्ये दिले जाते. विविध खेळ उदा. कबड्डी, क्रिकेट, खो-खो, इ. च्या मैदानांचे क्षेत्रफळ 'चौरस मीटर' मध्ये दिले जाते.

विविध एककानुसार क्षेत्रफळांच्या प्रमाणित एकक सारणीतील संदर्भानुसार आकृतीचे क्षेत्रफळ मोजण्यासाठी एकांक चौरसांचा [UNIT SQUARE] उपयोग केला जातो. तसेच आकृतीचे क्षेत्रफळ म्हणजे आकृतीमध्ये '1 एकक × 1 एकक' मापाचे पूर्ण किंवा अपूर्ण स्वरुपात किती चौरस तयार होतात? हे दर्शविणारी संख्या आहे.

क्षेत्रफळाच्या अध्ययन-अध्यापनात, 'कोणत्याही आकृतीचे क्षेत्रफळ म्हणजे त्या आकृतीमध्ये '1 एकक × 1 एकक' आकाराचे पूर्ण, अपूर्ण किंवा पूर्ण-अपूर्ण स्वरूपात तयार होणाऱ्या चौरसांची संख्या आहे'; हे सामान्यीकरण [GENERALISATION] स्वरुपात आकलन होणे अपरिहार्यच आहे. ह्या अनुषंगाने अर्थात आकृतीच्या क्षेत्रफळासंदर्भात आकृतीमध्ये '1 एकक × 1 एकक' आकाराचे तयार होणारे चौरस हे केवळ आयत आणि चौरस, ह्या दोन प्रकारच्या चौकोनामध्ये दाखवता येतात तसेच ह्या चौरसांची मोजदाद करता येते कारण चौकोनाच्या ह्या दोन्ही प्रकारांमध्ये चारही कोन काटकोन असतात किंवा ह्या चौकोनाच्या प्रत्येकी दोन भुजांमधील कोन 90^0 चा असतो.

अन्य आकृत्या उदा. विविध प्रकारचे त्रिकोण, विषमभुज चौकोन, समभुज चौकोन, वर्तुळ, अर्धवर्तुळ... इत्यादी आकृत्यांमध्ये आकृतीच्या क्षेत्रफळासंदर्भात तयार होणाऱ्या एकांक चौरसांची मोजदाद करणे शक्य होत नाही.

वरील विवेचनानुसार काही आयत तसेच चौरसांचे क्षेत्रफळ आलेख पेपरच्या सहाय्याने स्पष्ट केले आहे. [आलेख पेपर एवजी केवळ रेखाटन स्वरुपातही हे स्पष्ट करता येईल.]

ही उदाहरणे पाहण्यापूर्वी 'चौरस' किंवा 'वर्ग' ह्या चौकोनाची व्यवहारातील उदाहरणे लक्षात घेणे क्रमप्राप्त ठरते. ह्या उदाहरणाच्या सहाय्याने 'वर्ग' किंवा चौरसांची ठळक वैशिष्ट्ये सहजपणे लक्षात येतील.

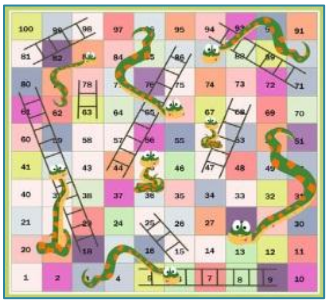
वर्गाकार किंवा चौरस आकार असणारी काही उदाहरणे खालीलप्रमाणे आहेत.

1] हातरुमाल

2] कॅरम बोर्ड

3] बुद्धिबळचा पट आणि त्यावरील 64 चौकोन

4] सापशिडीच्या पटावरील चौकोन



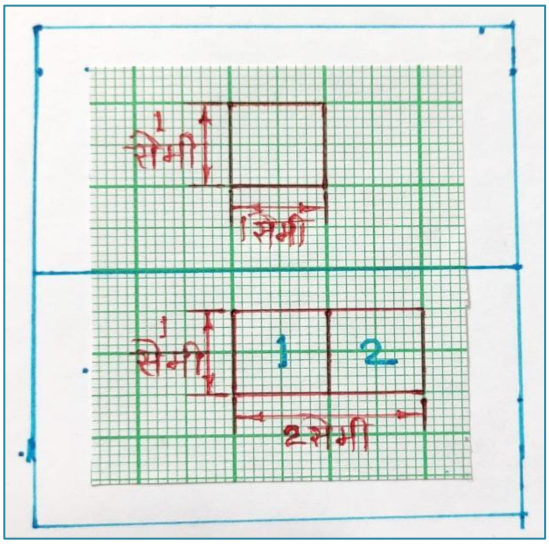
5] पूजेसाठी वापरावयाचा चौरंग [पृष्ठभाग चौरस]

वरील सर्व वर्गाकार किंवा चौरस आकृत्यांचे सूक्ष्म निरीक्षण केल्यानंतर वर्ग किंवा चौरस आकृतीची ठळक वैशिष्ट्ये खालील प्रमाणे लक्षात येतील.

1) वर्ग किंवा चौरसांच्या चारही भूजांची मापे समान असतात.

2) वर्ग किंवा चौरसांचे चारही कोन काटकोन (किंवा 90^0 चे) असतात.

1.4 काही आयत आणि चौरसांचे (किंवा वर्ग) क्षेत्रफळ



1) चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू

= 1 सेमी × सेमी

= 1 सेमी^{2} किंवा 1 चौसेमी

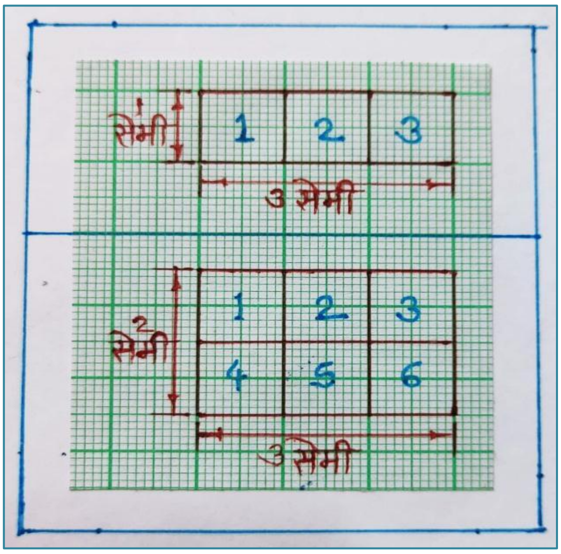
(हे क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक आहे, अर्थात लांबीचे एकक ‘सेंटिमीटर’ संदर्भात)

2) आयताचे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी

= 2 सेमी × 1 सेमी

= 2 सेमी^{2} किंवा 2 चौसेमी

3)



आयताचे क्षेत्रफळ = 3 सेमी × 1 सेमी

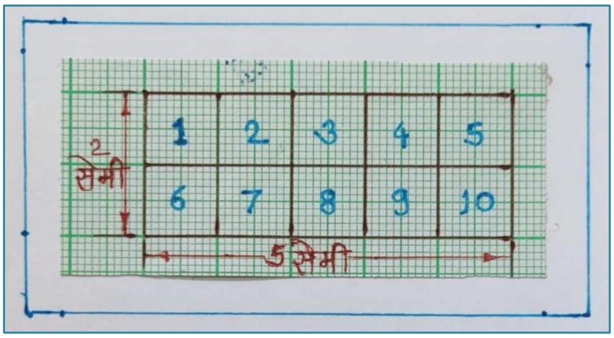
= 3 सेमी^{2} किंवा

3 चौसेमी

4) आयताचे क्षेत्रफळ = 3 सेमी × 2 सेमी

= 6 सेमी^{2} किंवा 6 चौसेमी

5)

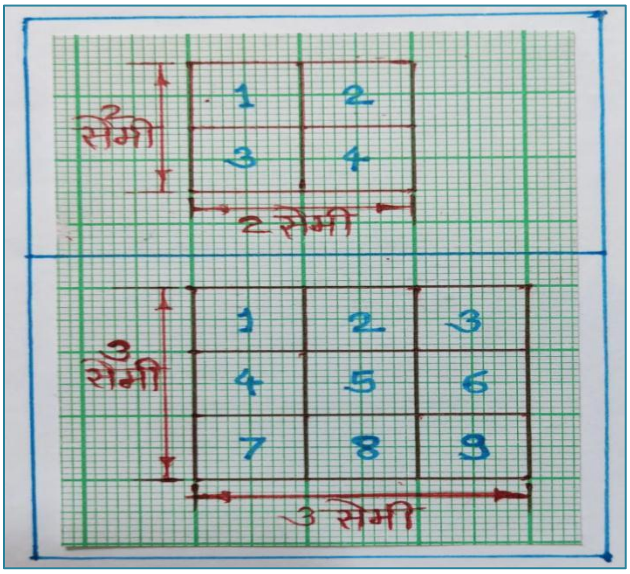


आयताचे क्षेत्रफळ = 5 सेमी × 2 सेमी

= 10 सेमी^{2}

किंवा 10 चौसेमी

6)



चौरसाचे क्षेत्रफळ = बाजू × बाजू

= 2 सेमी × 2 सेमी

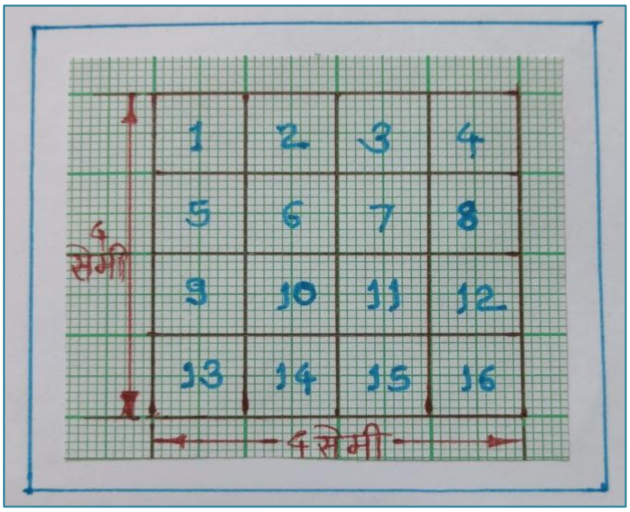
= 4 सेमी^{2} किंवा 4 चौसेमी

7)

चौरसाचे क्षेत्रफळ = 3 सेमी × 3 सेमी

= 9 सेमी^{2} किंवा 9 चौसेमी

8)



चौरसाचे क्षेत्रफळ = 4 सेमी × 4 सेमी

= 16 सेमी^{2}

किंवा

16 चौसेमी

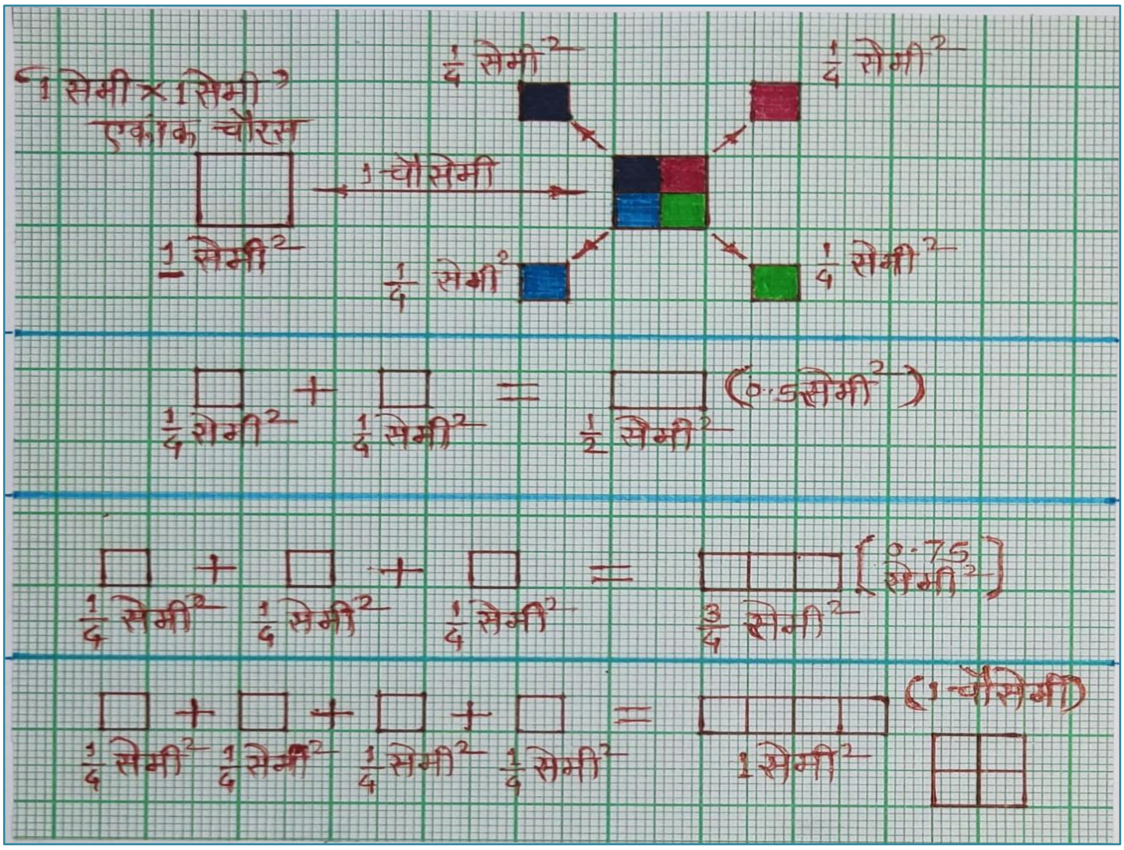
वरील सर्व आयत आणि चौरसांचे क्षेत्रफळ सूक्ष्मपणे विचारात घेऊन, आकृतीच्या क्षेत्रफळाबाबत खालील सामान्यीकरण [GENERALISATION] लिहिता येईल.

'आकृतीचे क्षेत्रफळ हे त्या आकृतीमध्ये तयार होणाऱ्या प्रमाणित एकक आकाराच्या एकांक चौरसांची [Unit Square] संख्या आहे'.

वरील उदाहरणामध्ये आयत आणि चौरसांची लांबी पूर्णांक स्वरुपात आहे. परिणामी सर्व आयत आणि चौरसांचे क्षेत्रफळ पण पूर्णांक स्वरूपातच मिळाले आहे. तसेच क्षेत्रफळासंदर्भात आकृतीमध्ये तयार होणाऱ्या प्रमाणित एकक आकाराच्या एकांक चौरसांची मोजदाद पण शक्य झाली आहे. भूमितीमध्ये खूप वेळा आकृत्यांचे क्षेत्रफळ (विशेष करून वर्तुळाचे क्षेत्रफळ) हे अपूर्णांक स्वरुपात, पूर्णांकयुक्त अपूर्णांक स्वरुपात (किंवा दशांश अपूर्णांक स्वरुपात) पण मिळते. तेव्हा हे संदर्भही सूक्ष्मपणे विचारात घेणे क्रमप्राप्त ठरते. येथे आकृतीच्या भुजांची मापे सेंटिमीटर ह्या एककामध्ये आहेत. ह्या अनुषंगाने क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक '1 वर्ग सेंटिमीटर (1 सेमी^{2})' किंवा '1 चौरस सेंटिमीटर (1 चौसेमी)' क्षेत्रफळाचे पाव भाग, अर्धा भाग, पाऊण भाग... इ. विविध अपूर्णांश आलेख स्वरुपात दर्शविले आहेत.

हे आलेख स्वरुपातील रेखाटन 'अपूर्णांक' संकल्पनेच्या अध्ययन-अध्यापनात पण उपयुक्त आहे.

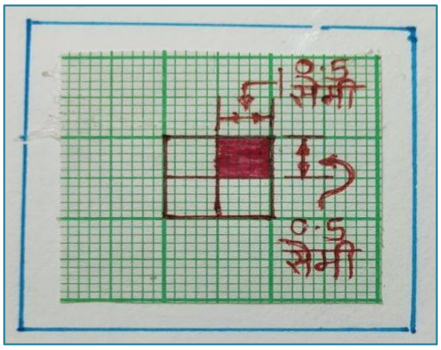
1.5 1 चौसेमी क्षेत्रफळाचे विविध अपूर्णांश



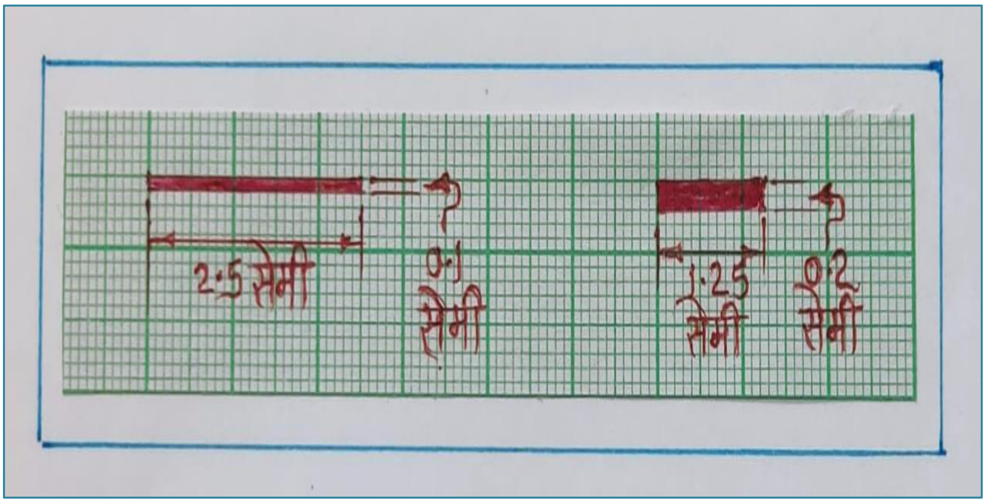
बाजूच्या आकृतीमध्ये दर्शविलेला छायांकित भाग हा 1 चौसेमीचा पाव भाग ($\frac{1}{4}$ सेमी^{2}) आहे.

क्षेत्रफळ = 0.5 सेमी × 0.5 सेमी

= 0.25 सेमी^{2} किंवा चौसेमी



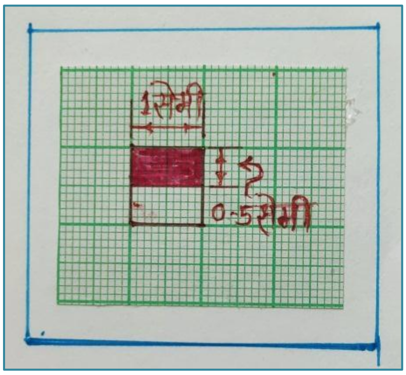
खालील दोन आकृत्यामध्ये, छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ 0.25 चौसेमी आहे.



क्षेत्रफळ = 2.5 सेमी × 0.1 सेमी
= 0.25 सेमी^{2}

क्षेत्रफळ = 1.25 सेमी × 0.2 सेमी
= 0.25 सेमी^{2}

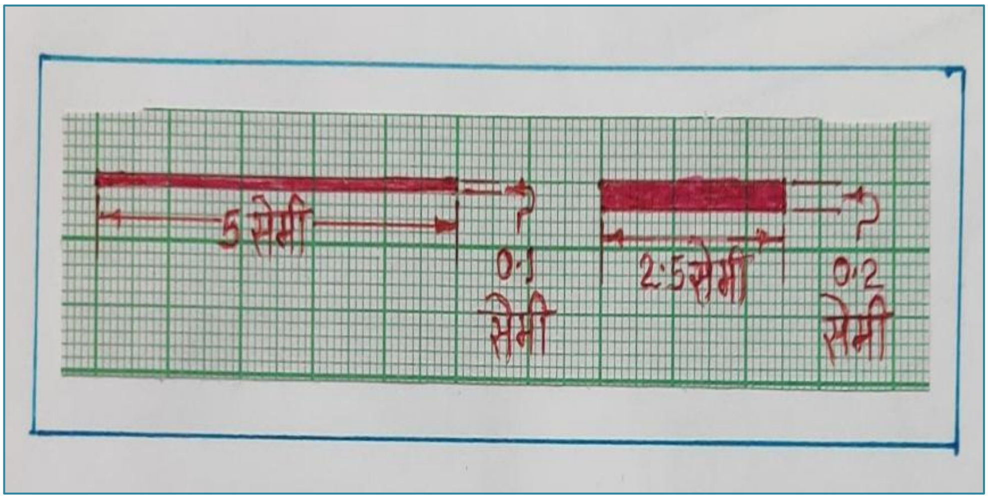
खालील आकृतीमध्ये दर्शविलेला छायांकित भाग हा 1 चौसेमीचा अर्धा भाग ($\frac{1}{2}$ सेमी^{2}) आहे.



क्षेत्रफळ = 1 सेमी × 0.5 सेमी

= 0.5 सेमी^{2} किंवा चौसेमी

खालील दोन आकृत्यांमध्ये, छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ 0.5 चौसेमी आहे.



क्षेत्रफळ = 5 सेमी × 0.1 सेमी

= 0.5 सेमी^{2}

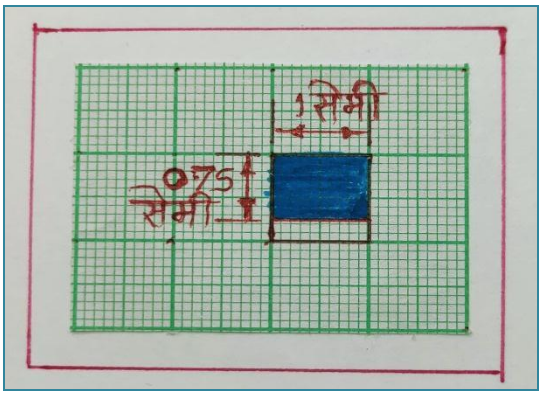
क्षेत्रफळ = 2.5 सेमी × 0.2 सेमी

= 0.5 सेमी^{2}

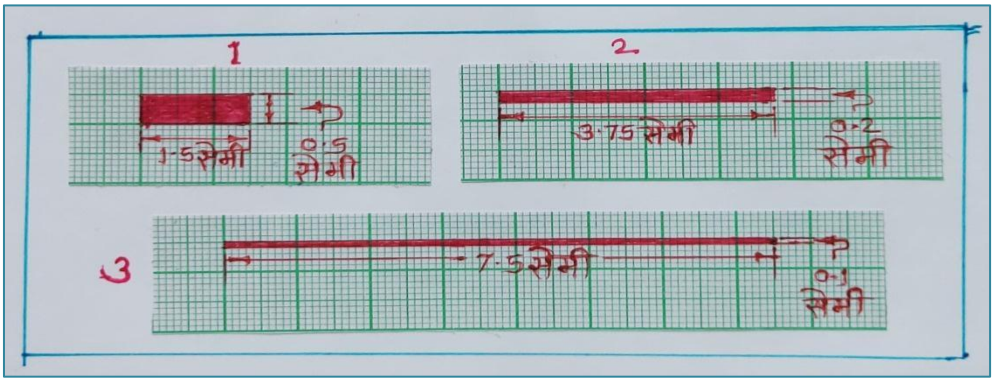
बाजूच्या आकृतीमध्ये दर्शवलेला छायांकित भाग हा 1 चौसेमी चा पाऊण ($\frac{3}{4}$ सेमी^{2}) भाग आहे.

क्षेत्रफळ = 0.75 सेमी × 1 सेमी

= 0.75 सेमी^{2} किंवा चौसेमी



खालील तीन आकृत्यांमध्ये, छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ
0.75 चौसेमी आहे.



वरील तीन आकृत्यांमध्ये छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ ----

किंवा

1) क्षेत्रफळ = 1.5 सेमी × 0.5 सेमी
= 0.75 सेमी^{2}

2) क्षेत्रफळ = 7.5 सेमी × 0.1 सेमी
= 0.75 सेमी^{2}

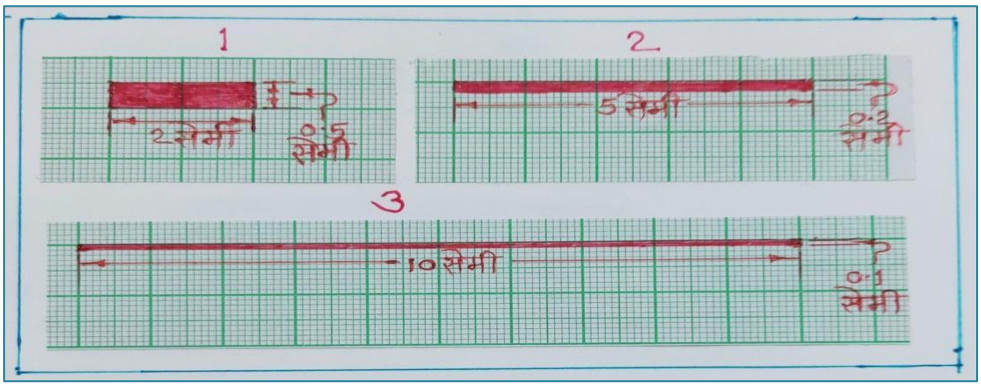
3) क्षेत्रफळ = 3.75 सेमी × 0.2 सेमी
= 0.75 सेमी^{2}

अशाच स्वरुपात क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक, येथे 1 वर्ग सेंटीमीटर किंवा 1 चौरससेंटिमीटर (1 चौसेमी)

(सेमी ^{2}) संदर्भात, खालील आकृत्यांमध्ये छायांकित भागाचे क्षेत्रफळ 1 चौसेमी किंवा 1 सेमी^{2} आहे.

क्षेत्रफळ = 2 सेमी × 0.5 सेमी
= 1 सेमी^{2}

क्षेत्रफळ = 5 सेमी × 0.2 सेमी
= 1 सेमी^{2}



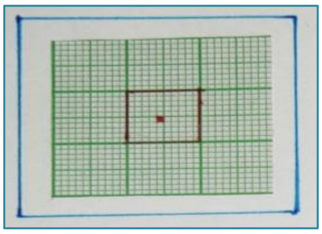
क्षेत्रफळ = 10 सेमी × 0.1 सेमी
= 1 सेमी^{2}

1.5.1 एक चौरस सेंटिमीटरचे (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक) आणखी काही अपूर्णांश

100 वा भाग (किंवा $\frac{1}{100}$ सेमी^{2})

क्षेत्रफळ = 0.1 सेमी × 0.1 सेमी

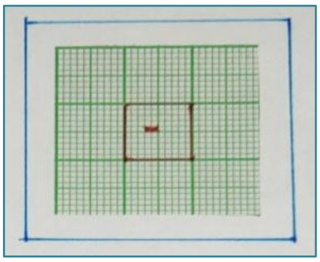
= 0.01 सेमी^{2}



50 वा भाग (किंवा $\frac{1}{50}$ सेमी^{2})

क्षेत्रफळ = 0.2 सेमी × 0.1 सेमी

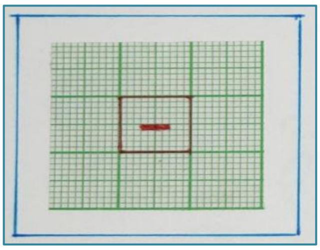
= 0.02 सेमी^{2}



25 वा भाग (किंवा $\frac{1}{25}$ सेमी^{2})

क्षेत्रफळ = 0. 4 सेमी × 0.1 सेमी

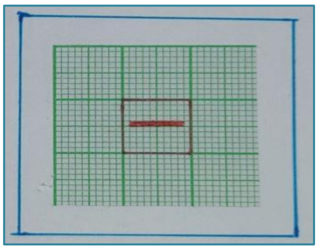
= 0. 04 सेमी^{2}



12.5 वा भाग (किंवा $\frac{1}{12.5}$ सेमी^{2})

क्षेत्रफळ = 0.8 सेमी × 0.1 सेमी

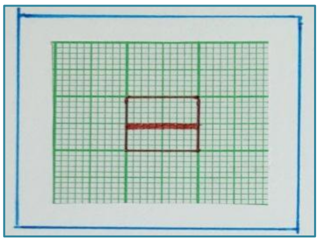
= 0.08 सेमी^{2}



10 वा भाग (किंवा $\frac{1}{10}$ सेमी^{2})

क्षेत्रफळ = 0.1 सेमी × 1 सेमी

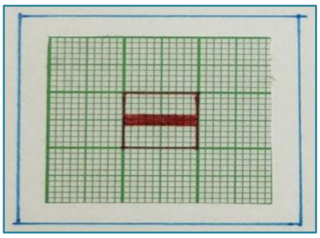
= 0.1 सेमी^{2}



5 वा भाग (किंवा $\frac{1}{5}$ सेमी^{2})

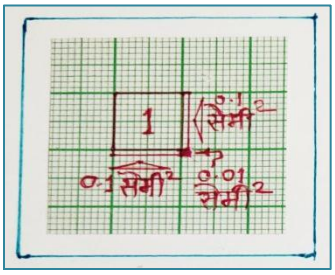
क्षेत्रफळ = 0.2 सेमी × 1 सेमी

= 0.2 सेमी^{2}



1.6 आकृतीच्या क्षेत्रफळातील विविध सूक्ष्म अपूर्णांश

क्षेत्रफळाबाबत स्पष्टीकरण देण्यासाठी आयत, चौरसांची लांबी ही सेंटिमीटर एककामध्ये विचारात घेतली आहे. ह्या अनुषंगाने क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक '1 वर्ग सेंटिमीटर (1 सेमी^{2})' किंवा '1 चौसेमी' च्या विविध सूक्ष्म अपूर्णांशाबाबत सविस्तर माहिती घेतली. हे विविध सूक्ष्म अपूर्णांश मुख्य क्षेत्रफळात अर्थात दिलेल्या आकृतीच्या क्षेत्रफळामध्ये पुढील काही उदाहरणांमध्ये दर्शविले आहेत. ह्या उदाहरणातील आकृत्या चौरस असून, चौरसांच्या भुजांची मापे 1.1 सेमी, 1.2 सेमी, 1.3 सेमी . . . . . 1.8 सेमी आहेत.



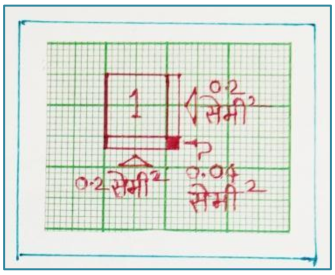
[चौरसाची भूजा = 1.1 सेमी]

क्षेत्रफळ = 1.1 सेमी × 1.1 सेमी

= 1.21 सेमी^{2}

आकृतीनुसार क्षेत्रफळ = 1 सेमी^{2} + 0.1 सेमी^{2}+ 0.1 सेमी^{2} + 0.01 सेमी^{2}

= 1.21 सेमी^{2} (किंवा 1.21 चौसेमी)



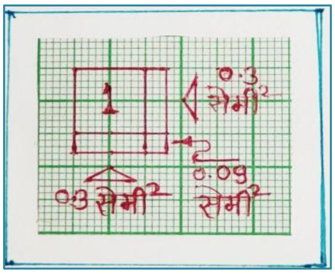
[चौरसाची भूजा = 1.2 सेमी]

क्षेत्रफळ = 1.2 सेमी × 1.2 सेमी

= 1.44 सेमी^{2} (किंवा 1.44 चौसेमी)

आकृतीनुसार क्षेत्रफळ = 1 सेमी^{2} + 0.2 सेमी^{2}+ 0.2 सेमी^{2} + 0.04 सेमी^{2}

= 1.44 सेमी^{2} (किंवा 1.44 चौसेमी)



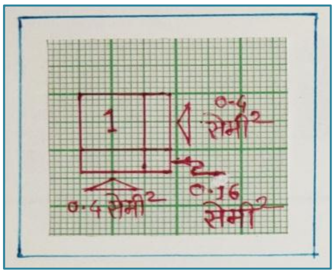
[चौरसाची भूजा = 1.3 सेमी]

क्षेत्रफळ = 1.3 सेमी × 1.3 सेमी

= 1.69 सेमी^{2} (किंवा 1.69 चौसेमी)

आकृतीनुसार क्षेत्रफळ = 1 सेमी^{2} + 0.3 सेमी^{2}+ 0.3 सेमी^{2} + 0.09 सेमी^{2}

= 1.69 सेमी^{2} (किंवा 1.69 चौसेमी)



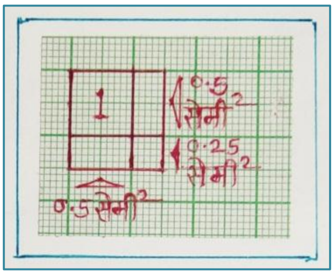
[चौरसाची भूजा = 1.4 सेमी]

क्षेत्रफळ = 1.4 सेमी × 1.4 सेमी

= 1.96 सेमी^{2} (किंवा 1.96 चौसेमी)

आकृतीनुसार क्षेत्रफळ = 1 सेमी^{2} + 0.4 सेमी^{2}+ 0.4 सेमी^{2} + 0.16 सेमी^{2}

= 1.96 सेमी^{2} (किंवा 1.96 चौसेमी)



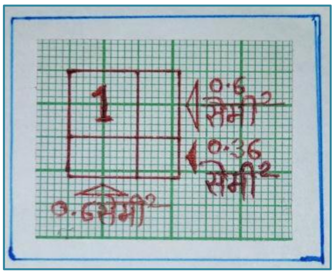
[चौरसाची भूजा = 1.5 सेमी]

क्षेत्रफळ = 1.5 सेमी × 1.5 सेमी

= 2.25 सेमी^{2} (किंवा 2.25 चौसेमी)

आकृतीनुसार क्षेत्रफळ = 1 सेमी^{2} + 0.5 सेमी^{2}+ 0.5 सेमी^{2} + 0.25 सेमी^{2}

= 2.25 सेमी^{2} (किंवा 2.25 चौसेमी)



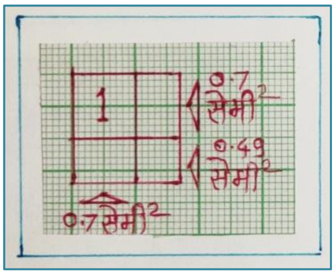
[चौरसाची भूजा = 1.6 सेमी]

क्षेत्रफळ = 1.6 सेमी × 1.6 सेमी

= 2.56 सेमी^{2} (किंवा 2.56 चौसेमी)

आकृतीनुसार क्षेत्रफळ = 1 सेमी^{2} + 0.6 सेमी^{2}+ 0.6 सेमी^{2} + 0.36 सेमी^{2}

= 2.56 सेमी^{2} (किंवा 2.56 चौसेमी)



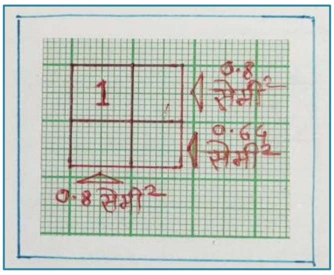
[चौरसाची भूजा = 1.7 सेमी]

क्षेत्रफळ = 1.7 सेमी × 1.7 सेमी

= 2.89 सेमी^{2} (किंवा 2.89 चौसेमी)

आकृतीनुसार क्षेत्रफळ = 1 सेमी^{2} + 0.7 सेमी^{2}+ 0.7 सेमी^{2} + 0.49 सेमी^{2}

= 2.89 सेमी^{2} (किंवा 2.89 चौसेमी)



[चौरसाची भूजा = 1.8 सेमी]

क्षेत्रफळ = 1.8 सेमी × 1.8 सेमी

= 3.24 सेमी^{2} (किंवा 3.24चौसेमी)

आकृतीनुसार क्षेत्रफळ = 1 सेमी^{2} + 0.8 सेमी^{2}+ 0.8 सेमी^{2} + 0.64 सेमी^{2}

= 3.24 सेमी^{2} (किंवा 3.24 चौसेमी)

अन्य आकृत्यांचे क्षेत्रफळ

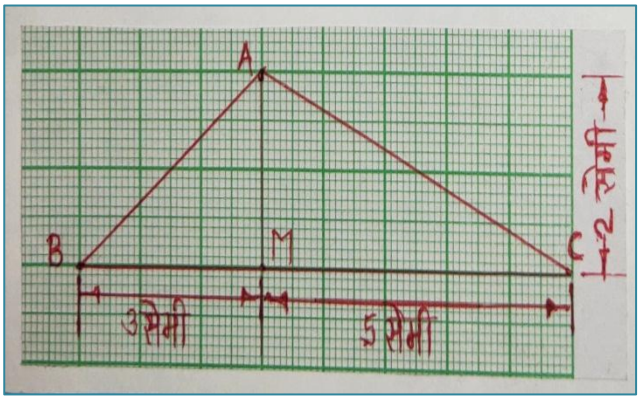
आयत आणि चौरस, ह्या आकृत्यांमध्ये क्षेत्रफळासंदर्भात आकृतीमध्ये '1 एकक × 1 एकक' आकाराचे एकांक चौरस (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक) दर्शवणे शक्य आहे. येथे हे क्षेत्रफळ दशांश अपूर्णांक स्वरुपात मिळाले असेल तरीही, हे चौरस दाखवता येतात आणि अर्थातच आकृतीच्या क्षेत्रफळाच्या अनुषंगाने ह्या एकांक चौरसांची मोजदाद करणे शक्य आहे. कारण आयत आणि चौरस ह्या आकृत्यांमध्ये प्रत्येकी दोन भूजा काटकोनात छेदतात किंवा आकृतीचे चारही कोन 90^0 चे (काटकोन) असतात.

अन्य आकृत्या उदा. त्रिकोण, चौकोनाचे इतर प्रकार, वर्तुळ, अर्धवर्तुळ..... इ. आकृत्यांमध्ये आकृतीच्या क्षेत्रफळासंदर्भात तयार होणारे '1 एकक × 1 एकक' आकाराचे एकांक चौरस (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक) दाखवणे शक्य होत नाही. त्यामुळे आकृतीच्या क्षेत्रफळाच्या अनुषंगाने ह्या चौरसाची मोजदाद करणे पण शक्य होत नाही. परंतु प्रत्येक आकृतीच्या क्षेत्रफळाबाबत 'आकृतीचे क्षेत्रफळ हे, त्या आकृतीमध्ये 1एकक × 1 एकक (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे चौरस) आकाराचे पूर्ण किंवा पूर्ण-अपूर्ण स्वरुपात (दशांश अपूर्णांक स्वरुपात) तयार होणाऱ्या एकांक चौरसांची (Unit Squares) संख्या आहे.' हे सामान्यीकरण आहे. (Generalisation) आहेच.

आकृतीच्या क्षेत्रफळासंदर्भात हा सामान्यीकरण स्वरुपातील आशय सविस्तरपणे स्पष्ट करण्यासाठी खालील त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ विचारात घेऊ त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ, समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ विचारात घेऊ.

1.7.1 त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ

वरील संदर्भ सविस्तरपणे लक्षात घेण्यासाठी खलील त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ विचारात घेऊ,



वरील त्रिकोण ABC मध्ये, रेख AM हा रेख BC वर (त्रिकोणाचा पाया) लंब आहे. त्रिकोण ABC मध्ये ____

ℓ (BC) = 8 सेमी (त्रिकोणाचा पाया)

ℓ (BM) = 3 सेमी

ℓ (MC) = 5 सेमी

ℓ (AM) = 2 सेमी (त्रिकोणाची उंची)

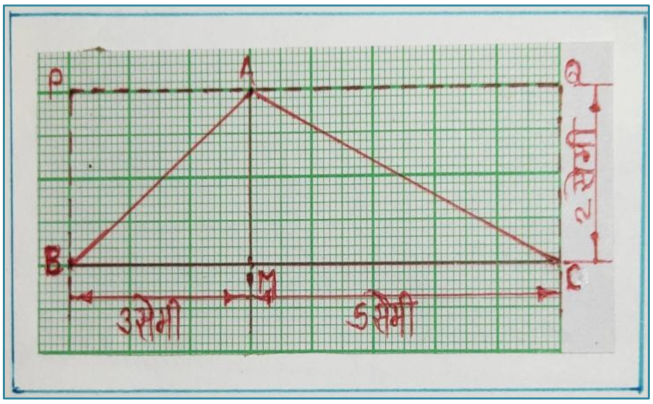
त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$× पाया × उंची

= $\frac{1}{2}$ × 8 सेमी × 2 सेमी

= 8 सेमी^{2}

त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ 8 सेमी^{2} आहे. परंतु आयत, चौरस आकृत्यांप्रमाणे हे 8 एकांक चौरस ((Unit Squares) त्रिकोण ABC मध्ये दाखवणे आणि ह्या अनुषंगाने एकांक चौरसांची मोजदाद करणे शक्य होत नाही.

त्रिकोण ABC च्या क्षेत्रफळासंदर्भात 8 एकांक चौरसांची (Unit Squares) मोजदाद खालीलप्रमाणे तर्कसंगत पद्धतीने केली आहे. ही एकांक चौरसांची (Unit Squares) मोजदाद करण्यासाठी त्रिकोण ABC मध्ये भौमितिक रचना नवीन स्वरुपात खालीलप्रमाणे केली आहे.



रेख PQ हा रेख BC ला (त्रिकोण ABC चा पाया) समांतर आहे. रेख QC, रेख PQ तसेच रेख PB आणि रेख PQ काटकोनात आहेत. परिणामी नवीन आयत PQCB तयार झाला आहे. ह्या आयतांची लांबी, रुंदी अनुक्रमे 8 सेमी, 2 सेमी आहे. ह्या अनुषंगाने आयत PQCB चे क्षेत्रफळ_____

क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी
= 8 सेमी × 2 सेमी
= 16 सेमी^{2}

आयत PQCB, रेख AM मुळे दोन असमान भागात विभागले असून हे दोन भाग आयत PAMB आणि आयत AQCM आहेत.

त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ 8 सेमी^{2} संदर्भात, '1 सेमी × 1 सेमी' आकाराच्या 8 एकांक चौरसांची (Unit Squares) मोजदाद तर्कसंगत पद्धतीने करावयाची आहे.

त्रिकोण ABC मध्ये नवीन भौमितिक रचंनेनुसार; हा त्रिकोण, आयत PQCB च्या अंतर्भागात असून रेख AM मुळे आयत PQCB दोन भागात विभागला आहे. हे आयत PAMB आणि आयत AQCM आहेत. तसेच रेख AM मुळे त्रिकोण ABC पण दोन त्रिकोण भागात विभागला आहे. हे त्रिकोण अनुक्रमे त्रिकोण ABM, त्रिकोण AMC आहेत. ह्या त्रिकोणापैकी त्रिकोण ABM हा आयत PAMB चा भाग आहे आणि त्रिकोण AMC हा आयत AQCM चा भाग आहे. भौमितिक रचनेनुसार आयत PAMB ची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी आहे. तसेच आयत AQCM ची लांबी 5 सेमी, रुंदी 2 सेमी आहे. मोठा आयत PQCB चे क्षेत्रफळ हे आयत PAMB चे क्षेत्रफळ आणि आयत AQCM च्या क्षेत्रफळांची बेरीज होईल. ह्या अनुषंगाने आयत PAMB आणि आयत AQCM चे क्षेत्रफळ काढू.

(आयत PQCB चे क्षेत्रफळ काढले आहे; हे 16 सेमी^{2} आहे.)

आयत PAMB चे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी
= 3 सेमी × 2 सेमी
= 6 सेमी^{2}

आयत AQCM चे क्षेत्रफळ = लांबी × रुंदी
= 5 सेमी × 2 सेमी
= 10 सेमी^{2}

आयत PQCB चे क्षेत्रफळ = आयत PAMB चे क्षेत्रफळ + आयत AQCM चे क्षेत्रफळ
= 6 सेमी^{2} + 10 सेमी^{2}
= 16 सेमी^{2}

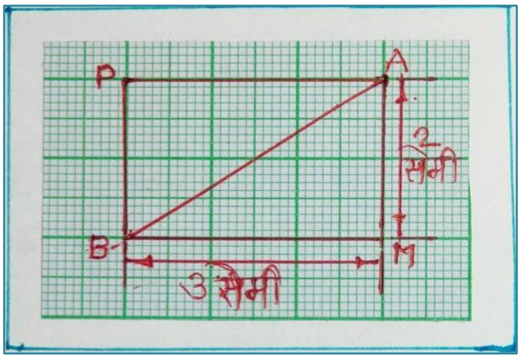
मुख्य त्रिकोण ABC च्या क्षेत्रफळाच्या अनुषंगाने, रेख AM मुळे त्रिकोण ABC हा दोन त्रिकोण AMB आणि त्रिकोण ACM असा विभागला आहे. हे दोन त्रिकोण अनुक्रमे आयत PAMB आणि आयत AQCM चा भाग आहेत.

आयत PAMB चे क्षेत्रफळ 6 सेमी^{2} आहे. ह्या आयतामध्ये त्रिकोण AMB असून, रेख AB हा आयताचा कर्ण आहे. आयताच्या कर्णामुळे आयताचे क्षेत्रफळ दोन समान भागात विभागले जाते. ह्या अनुषंगाने त्रिकोण AMB चे क्षेत्रफळ 3 सेमी^{2} आहे.

त्रिकोण ABM चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$× पाया × उंची

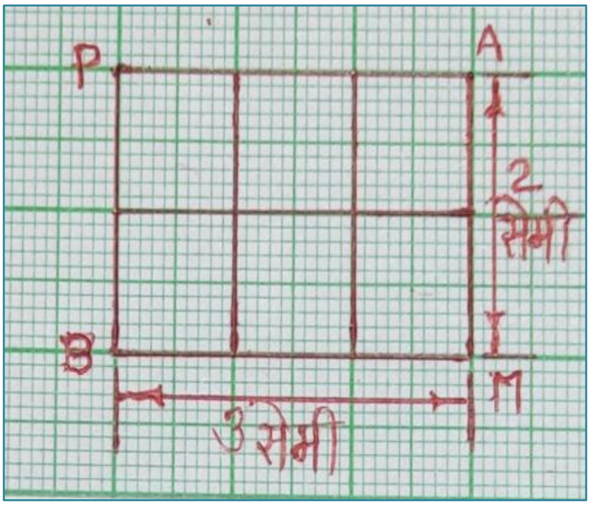
= $\frac{1}{2}$× 3 सेमी × 2 सेमी

= 3 सेमी^{2}

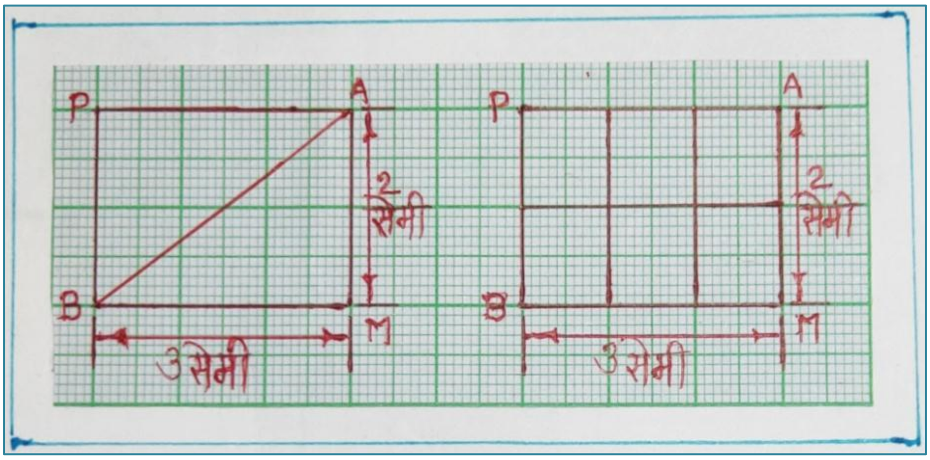


त्रिकोण ABM चे क्षेत्रफळ (3सेमी^{2}), आयत PAMB चे क्षेत्रफळ 6 सेमी^{2} च्या तुलनेत अर्धा भाग आहे. त्रिकोण AMB मध्ये क्षेत्रफळासंदर्भात ‘1सेमी × 1 सेमी’ आकाराचे एकांक चौरस (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक) दर्शवणे शक्य होत नाही. त्यामुळे त्रिकोणामध्ये क्षेत्रफळासंदर्भात चौरसांची मोजदाद करणे पण शक्य होत नाही.

आयत आकृतीमध्ये कोणतेही दोन समोरासमोरील शिरोबिंदू जोडून कर्ण काढले की, आयताचे दोन समान भाग होतात. हे दोन समान भाग त्रिकोण असतात. ह्या सोबतच आयत आकृतीमध्ये कोणत्याही समोरासमोरील (लांबी किंवा रुंदी) मध्यबिंदू जोडल्यानंतर आयताचे समान भाग होतात. हे समान भाग आयत किंवा चौरस असतात. ह्या दोन भागामध्ये क्षेत्रफळासंदर्भात ‘1 सेमी × 1 सेमी’ आकाराचे एकांक चौरस (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक) दर्शविणे तसेच त्या चौरसांची मोजदाद करणे पण शक्य आहे.



आयत PAMB मध्ये रेख PB आणि रेख AM चे मध्यबिंदू जोडल्यानंतर आयताचे दोन समान भाग होतात. आकृतीमध्ये दर्शवल्याप्रमाणे ह्या प्रत्येक भागाचे (किंवा अर्ध्या भागाचे) क्षेत्रफळ 3 सेमी^{2} आहे.

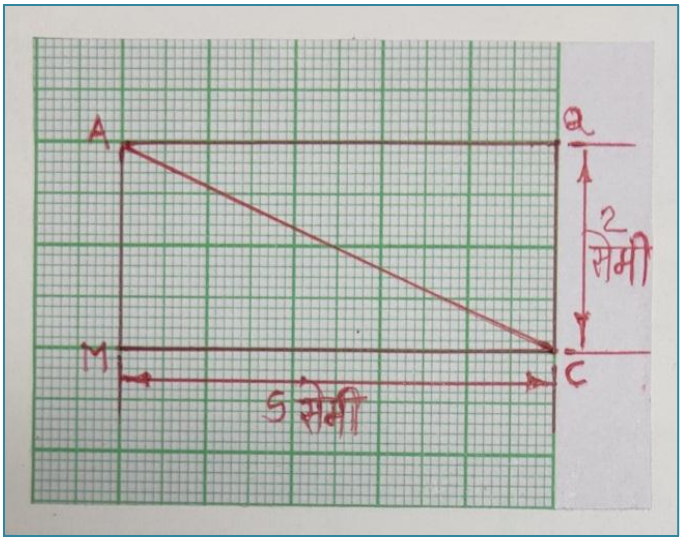


वरील विवेचनावरून त्रिकोण AMB चे क्षेत्रफळ 3 सेमी^{2} आहे.

त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ हे; त्रिकोण AMB व त्रिकोण AMC च्या क्षेत्रफळांची बेरीज आहे.

त्रिकोण AMB च्या क्षेत्रफळाबाबत सविस्तर माहिती घेतली.

त्रिकोण AMC, हा आयत AQCM च्या अंतर्भागात आहे.



त्रिकोण AMC चे क्षेत्रफळ____

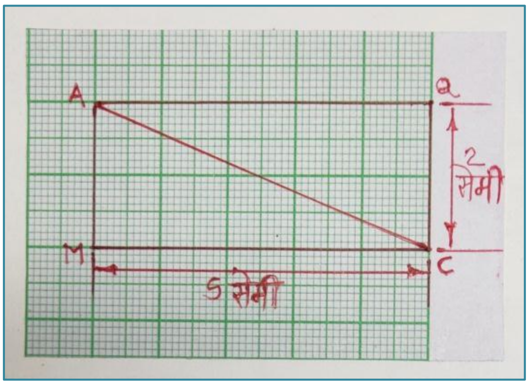
$= \frac{1}{2} \times$ पाया $\times$ उंची

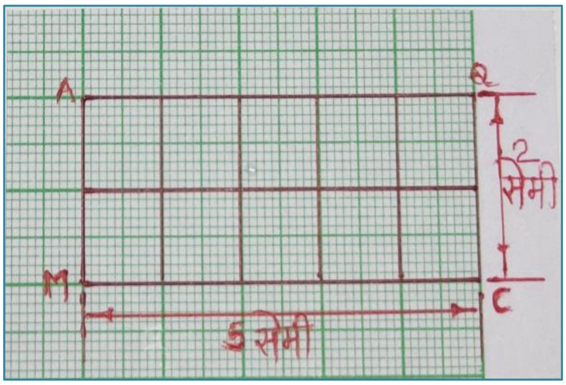
$= \frac{1}{2} \times 5$ सेमी $\times 2$ सेमी

$= 5$ सेमी^{2}

रेख AC हा आयत AQCM चा कर्ण आहे. त्यामुळे त्रिकोण AMC हा, आयत AQCM चा अर्धा भाग आहे, हे संदर्भ साकल्याने विचारात घेता त्रिकोण AMC चे क्षेत्रफळ 5 सेमी^{2} आहे. आयत AQCM चे क्षेत्रफळ 10 सेमी^{2} आहे.

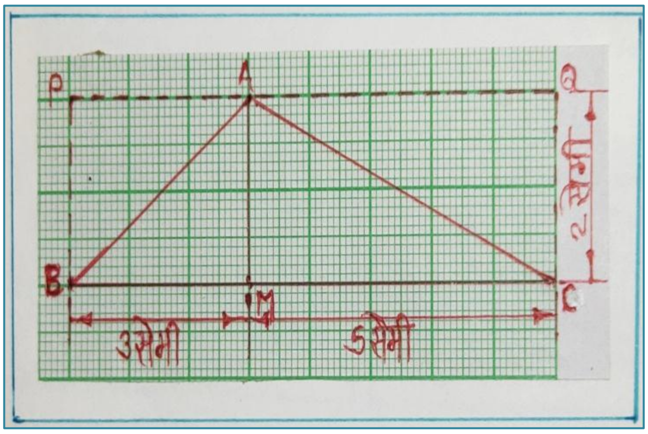
आयत AQCM चा रेख AM आणि रेख QC ह्या समोरासमोरील भुजांचे (आयताची रुंदी) मध्यबिंदू जोडल्यानंतर आयताचे समान दोन भाग होतात. खालील आकृतीमध्ये दर्शवल्याप्रमाणे ह्या प्रत्येक भागाचे
(किंवा अर्ध्या भागाचे) क्षेत्रफळ 5 सेमी^{2} आहे.





वरील विवेचनावरून त्रिकोण AMC चे क्षेत्रफळ 5 सेमी^{2} आहे.

भौमितिक रचनेनुसार त्रिकोण ABC हा त्रिकोण AMB आणि त्रिकोण AMC अशा दोन भागात विभागला आहे. हे त्रिकोण अनुक्रमे आयत PAMB आणि AQCM चा भाग आहेत. त्यामुळे



त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ, हे त्रिकोण AMC आणि त्रिकोण AMC च्या क्षेत्रफळांची बेरीज आहे.

त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$× पाया × उंची

= $\frac{1}{2}$× 8सेमी × 2सेमी

= 8 सेमी^{2}

त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ = त्रिकोण AMB चे क्षेत्रफळ + त्रिकोण AMC चे क्षेत्रफळ

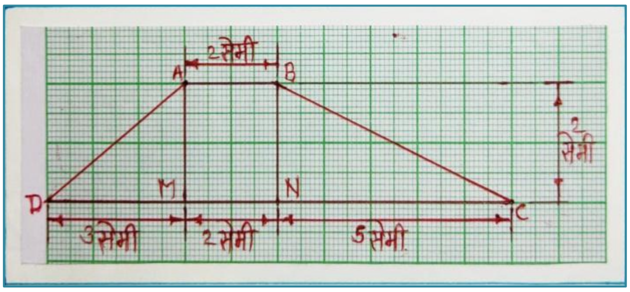
= 3 सेमी^{2} + 5 सेमी^{2}

= 8 सेमी^{2}

त्रिकोण ABC च्या क्षेत्रफळाबाबत ‘1 सेमी × 1 सेमी’ आकाराचे (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक) एकांक चौरस दर्शवणे आणि त्या अनुषंगाने चौरसांची मोजदाद करणे पण शक्य होत नाही. हा त्रिकोण ABC, रेख AM मुळे क्षेत्रफळासंदर्भात दोन त्रिकोण AMB आणि त्रिकोण AMC असा विभागला आहे. ह्या अनुषंगाने त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ हे; त्रिकोण AMB आणि त्रिकोण AMC च्या क्षेत्रफळांची बेरीज आहे. ह्या दोन त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ तर्कसंगत पद्धतीने स्पष्ट करण्यासाठी त्रिकोण ABC शी निगडीत भौमितिक रचना नवीन स्वरुपात केली आहे. ह्या रचनेमध्ये त्रिकोण AMC हा आयत PAMB आणि त्रिकोण AMC हा आयत AQCM चा भाग आहे. ह्या आयतांच्या क्षेत्रफळांच्या सहाय्याने त्रिकोण AMB आणि त्रिकोण AMC चे क्षेत्रफळ तर्कसंगत पद्धतीने स्पष्ट केले आहे. ह्या माहितीच्या आधारे त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ स्पष्ट केले आहे.

1.7.2 समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ

आकृतीच्या क्षेत्रफळाबाबत सामान्यीकरण संदर्भात आणखी एक आकृती; समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ विचारात घेऊ.



वरील समलंब चौकोन ABCD मध्ये ℓ (AB) = 2 सेमी

ℓ (DC) = 10 सेमी

भूजा AB ‖ भूजा DC तसेच लंबांतर = 2 सेमी

समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ = $\frac{1}{2}$ × समांतर बाजूच्या लांबीची बेरीज × लंबांतर

= $\frac{1}{2}$ × [ℓ (DC)+ ℓ (AB)] × 2 सेमी

= $\frac{1}{2}$ × [10 सेमी + 2 सेमी] × 2 सेमी

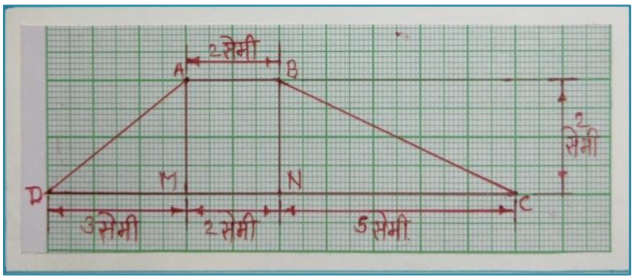
= $\frac{1}{2}$ × 12 सेमी × 2 सेमी

= 12 सेमी^{2}

वरील समलंब चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ 12 सेमी^{2} आहे. परंतु आयत, चौरस आकृत्याप्रमाणे हे 12 एकांक चौरस, समलंब चौकोनामध्ये दाखवणे आणि ह्या अनुषंगाने एकांक चौरसांची मोजदाद करणे शक्य होत नाही.

समलंब चौकोन ABCD च्या क्षेत्रफळासंदर्भात 12 एकांक चौरसांची मोजदाद खालीलप्रमाणे तर्कसंगत पद्धतीने केली आहे.

वरील समलंब चौकोन ABCD मध्ये शिरोबिंदू A आणि B मधून बाजू CD वर रेख AM आणि BN हे लंब काढा



हे दोन लंब काढल्यामुळे समलंब चौकोन ABCD चे खालील प्रमाणे तीन भाग झाले आहेत.

i. त्रिकोण ADM

ii. त्रिकोण BNC

iii. वरील दोन स्वतंत्र त्रिकोण आकृतीच्या मध्ये तसेच दोन त्रिकोणाला जोडून चौरस ABNM आहे.

तसेच ℓ (AB) = ℓ (MN) = 2 सेमी

ℓ (DM) = 3 सेमी

ℓ (CN) = 5 सेमी

ह्या अनुषंगाने समलंब चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ ____

= त्रिकोण ADM चे क्षेत्रफळ + चौरस ABNM चे क्षेत्रफळ + त्रिकोण BNC चे क्षेत्रफळ

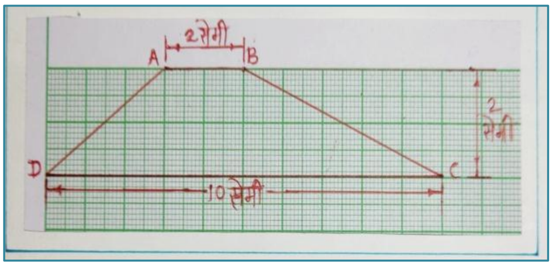
= $\frac{1}{2}$ 3 सेमी × 2 सेमी + बाजू × बाजू + $\frac{1}{2}$× 5 सेमी × 2 सेमी

= 3 सेमी^{2} + 2 सेमी × 2 सेमी + 5 सेमी^{2}

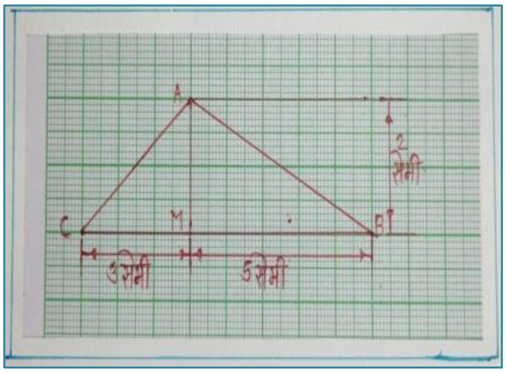
= 3 सेमी^{2} + 4 सेमी^{2} + 5 सेमी^{2}

= 12 सेमी^{2}

(समलंब चौकोनाच्या क्षेत्रफळाचे सूत्र वापरुन हेच उत्तर मिळाले आहे.)



संदर्भ क्र.1.7.1 मध्ये खालील त्रिकोण ABC चे क्षेत्रफळ काढले आहे आणि त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळासंदर्भात एकांक चौरसांची (Unit Square) मोजदाद तर्कसंगत पद्धतीने केली आहे.



समलंब चौकोनातील डाव्या बाजूचा त्रिकोण आणि वरील त्रिकोण ABC मधील त्रिकोण ACM हे समान मापाचे आहेत. संदर्भ 1.7.1 नुसार ह्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 3 सेमी^{2} आहे.

समलंब चौकोनातील उजव्या बाजूचा त्रिकोण आणि वरील त्रिकोण ABC मधील त्रिकोण AMB हे समान मापाचे आहेत. संदर्भ क्र. 1.7.1 ह्या त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ 5 सेमी^{2} आहे. (ह्या अनुषंगाने दोन्ही त्रिकोणांच्या क्षेत्रफळासंदर्भातील स्पष्टीकरण संदर्भ 1.7.1 मध्ये दिले आहे.)

समलंब चौकोन ABCD मध्ये त्रिकोण AMD आणि त्रिकोण BNC च्या मध्यभागी तसेच ह्या त्रिकोणाला जोडून चौरस ABNM चे क्षेत्रफळ 4 सेमी^{2} आहे आणि हे एकांक चौरस (Unit Square) चौरस ABNM मध्ये दर्शवले आहेत.

हे संदर्भ साकल्याने विचारात घेता, समलंब चौकोन ABCD चे क्षेत्रफळ सूत्र वापरुन तसेच तर्कसंगत पद्धतीने 12 सेमी^{2} मिळते.

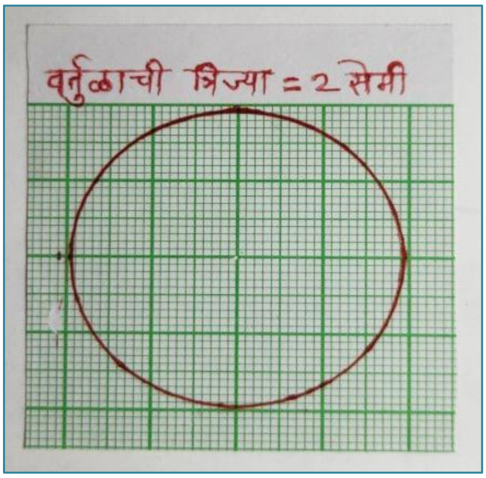
वरील संदर्भ 1.7.1 मध्ये त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ, 1.7.2 मध्ये समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ; ह्या दोन उदाहरणावरून आकृतीच्या क्षेत्रफळासंदर्भात आकृतीमध्ये '1 एकक × 1 एकक' (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे एकांक चौरस दाखवणे शक्य होत नाही. त्यामुळे आकृतीच्या क्षेत्रफळाच्या अनुषंगाने ह्या चौरसांची मोजदाद करणे पण शक्य होत नाही. परंतु प्रत्येक आकृतीच्या क्षेत्रफळाबाबत _____

'आकृतीचे क्षेत्रफळ हे, त्या आकृतीमध्ये 1 एकक × 1 एकक (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे चौरस) आकाराचे पूर्ण किंवा पूर्ण-अपूर्ण स्वरुपात (दशांश अपूर्णांक स्वरुपात) तयार होणाऱ्या एकांक चौरसांची (Unit Square) संख्या आहे', हे सामान्यीकरण (Generalisation) आहे.

ह्या अनुषंगाने सदर्भ 1.7.1 मध्ये त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ, 1.7.2 मध्ये समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ तर्कसंगत पद्धतीने मिळवले हे स्पष्ट केले आहे.

1.7.3 वर्तुळाचे क्षेत्रफळ

आकृतीच्या क्षेत्रफळाबाबत वरील सामान्यीकरण (Generalisation) हे सर्व आकृत्यांबाबत आहेच. खालील वर्तुळाचे क्षेत्रफळ विचारात घेऊ



वर्तुळाची त्रिज्या 2 सेमी आहे.

वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = π (त्रिज्या)^2

= 3.14 × (2 सेमी)^2

= 3.14 × 4 सेमी^{2}

= 12.56 सेमी^{2}

वरील वर्तुळामध्ये क्षेत्रफळासंदर्भात '1 सेमी × 1 सेमी' आकाराचे एकांक चौरस दर्शवणे आणि त्या अनुषंगाने एकांक चौरसांची मोजदाद करणे पण शक्य होत नाही. संदर्भ क्र. 1.7.1 मध्ये त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ तसेच 1.7.2 मध्ये समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ तर्कसंगत पद्धतीने स्पष्ट केले आहे. परंतु वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाबाबत हे शक्य होणार नाही.

सारांश

एखाद्या प्रतलामध्ये रेखाटन केलेल्या बंदिस्त आकृतीने व्यापलेल्या जागेला त्या आकृतीचे क्षेत्रफळ असे म्हणतात. महत्वमापन पठातील विविध आकृत्यांची क्षेत्रफळांची सूत्रे, विशेष करून त्या सूत्रातील समान स्वरूपाचा किंवा सामाईक भाग; आकृतीच्या भुजांची लांबी एकांकासह गुणाकारात स्वरुपात दोन वेळा पाहायला मिळते. ह्या अनुषंगाने क्षेत्रफळ हे 'वर्ग एकक' किंवा 'चौरस एकक' असे दिले जाते.

द्विमितीय आकार संदर्भात 'वर्ग' आणि 'चौरस' (Square) हे समानार्थी शब्द आहेत.

सर्व आकृतीच्या क्षेत्रफळाबाबत सामान्यीकरण (Generalisation)_____

'आकृतीचे क्षेत्रफळ हे, त्या आकृतीमध्ये 1 एकक × 1 एकक (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे चौरस) आकाराचे पूर्ण, अपूर्ण किंवा पूर्ण-अपूर्ण स्वरुपात तयार होणाऱ्या एकांक चौरसांची (Unit Square) संख्या आहे.'

ह्या अनुषंगाने आकृतीच्या क्षेत्रफळासंदर्भात केवळ आयत आणि चौरस आकृत्यामध्ये '1 एकक × 1 एकक' (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे) आकाराचे एकांक चौरस (Unit Squares) दर्शवणे तसेच त्या चौरसांची मोजदाद करणे शक्य आहे. ह्या संदर्भानुसार काही आयत आणि चौरसांचे क्षेत्रफळ सविस्तरपणे स्पष्ट केले आहे.

त्रिकोण, वर्तुळ, अर्धवर्तुळ, चौकोनाच्या अन्य प्रकारांमध्ये तसेच अन्य आकृत्यांच्या क्षेत्रफळासंदर्भात आकृत्यांमध्ये '1 एकक × 1 एकक' (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे) आकाराचे एकांक चौरस दर्शवणे शक्य होत नाही. त्यामुळे आकृतीच्या क्षेत्रफळासंदर्भात ह्या चौरसांची मोजदाद करणे शक्य होत नाही. परंतु क्षेत्रफळाबाबतचे सामान्यीकरण सर्व आकृत्यांबाबत आहेच, ह्या अनुषंगाने त्रिकोण आणि समलंब चौकोनाचे क्षेत्रफळ तर्कसंगत पद्धतीने स्पष्ट केले आहे.

2. घनफळ : संकल्पना

2.1 प्रस्तावना

पदार्थाच्या तिन्ही अवस्थेत पदार्थाला आकारमान (अर्थात लहान-मोठा आकार) असते. पदार्थाचे आकारमान घनफळाच्या स्वरुपात सांगितले जाते.

भूमितीमध्ये विविध त्रिमितीय आकृतीचे घनफळ त्या विशिष्ट आकृतीच्या घनफळाचे सूत्र वापरुन काढले जाते. ह्या प्रकरणामध्ये घनफळाच्या संकल्पनेबाबतची सैद्धांतिक (Theorotical) स्वरूपाची माहिती खूपच सुलभ भाषेत, सुलभ स्वरुपात स्पष्ट केली आहे. ह्या माहितीच्या आधारे 'घनफळ' ही संकल्पना अधिकाधिक सुस्पष्ट स्वरुपात आकलन (Understanding) होईल.

2.2 घनफळ म्हणजे काय?

एखाद्या त्रिमितीय आकृतीने अवकाशातील व्यापलेल्या जागेला त्या त्रिमितीय आकृतीचे घनफळ असे म्हणतात.

विविध त्रिमितीय आकृत्या उदा. घन, इष्टिकाचिती, पंचकोनी सूची, पंचकोनी चिती, त्रिकोणचिती, षटकोनी सूची, षटकोनी चिती, वृत्तचिती, गोल, अर्धगोल..... इ. त्रिमितीय आहेत. ह्या आकृत्यामध्ये आकृतीच्या अकरमानासंदर्भात लांबी 3 वेळा किंवा लांबी, रुंदी आणि उंची असते. महत्त्वमापन पाठामध्ये देण्यात आलेली काही त्रिमितीय आकृत्यांची घनफळांची सूत्रे खालीलप्रमाणे आहेत.

1) गोलाचे घनफळ = $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r = गोलाची त्रिज्या)

2) अर्धगोलाचे घनफळ = $\frac{2}{3}\pi r^3$ (r = गोलाची त्रिज्या)

3) वृत्तचितीचे घनफळ = $\pi r^2 h$

h = वृत्तचितीची उंची r = वृत्तचितीच्या वर्तुळाकार तळाची त्रिज्या.

4) शंकूचे घनफळ = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

5) घनाचे घनफळ = (बाजू)^3

6) इष्टिकाचितीचे घनफळ = लांबी × रूंदी × उंची

वरील विविध आकृत्यांच्या घनफळांच्या सूत्राचे सूक्ष्म अवलोकन केले असता, एक महत्त्वपूर्ण संदर्भ येतो; हा खालीलप्रमाणे आहे.

कोणत्याही त्रिमितीय आकृतीच्या घनफळांच्या सूत्रामध्ये दशांश अपूर्णांक स्वरुपातील सहगुणक वगळता आकृतीच्या भुजांचे संदर्भ अर्थात भुजांची लांबी किंवा मापे एककांसह गुणाकार स्वरुपात तीन वेळा पाहायला मिळतात.

गोल किंवा अर्धगोलाच्या घनफळाच्या सूत्रामध्ये $\frac{4}{3}\pi$ किंवा $\frac{2}{3}\pi$ सह गुणाकारात 'त्रिज्या × त्रिज्या × त्रिज्या' असे संदर्भ आहेत.

ह्या अनुषंगाने आकृतीच्या भूजांचे जे एकक वापरले आहे उदा. सेंटिमीटर किंवा सेमी हा संदर्भ घेऊन....

भुजा सेमी × भुजा सेमी × भुजा सेमी

= (भुजा × भुजा × भुजा) सेमी^{1} × सेमी^{1} × सेमी^{1}

= भुजा × भुजा × भुजा × सेमी $^{1+1+1}$

= भुजा × भुजा × भुजा × सेमी^{3} किंवा घनसेंटिमीटर असे लिहितात. ह्या अनुषंगाने घनफळाचे मापन हे 'घन' किंवा 'घनाकृती'च्या स्वरुपात केले जाते. घनसेंटिमीटर हे लघू स्वरुपात घसेमी असे पण लिहिले जाते. (वरील सूत्रामध्ये गुणाकारत पाया समान असताना घातांकाची बेरीज केली जाते, ह्या नियमांनुसार लांबीचे एकक, सेमी^{1} × सेमी^{1} × सेमी^{1} = सेमी^{3} हे प्राप्त होते.

येथे हे सूत्र लिहिताना पहिल्या ओळीमध्ये ह्या संदर्भात सेमी × सेमी × सेमी असे लिहिले आहे. कारण कोणतीही संख्या किंवा चलाचा घातांक 1 असेल तर तो न लिहिण्याचा संकेत आहे.)

हे अधिकाधिक सुलभ स्वरुपात स्पष्ट करण्यासाठी एका इष्टिकाचितीचे घनफळ विचारात घेऊ. खालील इष्टीकाचितीची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी आणि उंची 1 सेमी आहे.

इष्टीकाचितीचे घनफळ = लांबी × रुंदी × उंची

= 3 सेमी × 2 सेमी × 1 सेमी

= (3×2×1) सेमी × सेमी × सेमी

= 6 सेमी^{3} किंवा घनसेंटिमीटर

2.3 'घन' ह्या शब्दाचे अर्थ

'घन' ह्या शब्दाचे अर्थ खालील प्रमाणे आहेत. गणित विषयातील घातांक पाठामध्ये कोणत्याही चलाचा किंवा संख्येचा घातांक 3 असताना; संख्येचा किंवा चलाचा घन असे वाचन केले जाते.

हे वाचन त्या संख्येचा किंवा चलाचा घातांक तीन आहे, असे केले जात नाही. घन म्हणजे घनाकृती एक भौमितिक (त्रिमितीय स्वरूपाची) आकृती असून ह्या आकृतीच्या सर्व भुजा समान मापाच्या असतात. ह्या आकृतीला 8 शिरोबिंदू, 12 कडा आणि सहा समान आकाराचे चौरस किंवा वर्गाकार पृष्ठभाग असतात. मराठी भाषेमध्ये 'घन' म्हणजे ढग, हा पण एक अर्थ आहे.

द्रवाच्या तीन अवस्था आहेत. ह्या अवस्था 'घन' 'द्रव' आणि 'वायू' असून 'घन' रूप अवस्था, ह्या अर्थाने पण 'घन' ह्या शब्दाचा अर्थ आहे.

2.4 घनफळाचे प्रमाणित एकक (Standard Unit of Volume)

खालील आकृतीमध्ये 'घना'ची किंवा घनाकृतीची बाजू 1 सेमी आहे. ह्या घनाकृतीमुळे अवकाशातील व्यापलेली जागा 1 घनसेंटिमीटर (1 घसेमी) किंवा 1 सेमी³ अर्थात 1 सेमी बाजू असलेला घन, हे घनफळाच्या मापनासाठी प्रमाणित एकक वापरतात.

घनाचे घनफळ = बाजू × बाजू × बाजू

= 1 सेमी × 1 सेमी × 1 सेमी

= 1 सेमी³ किंवा घनसेंटिमीटर (घसेमी)

आकृतीच्या भुजांची मापे ज्या एककांमध्ये दिली आहेत. त्या एककानुसार घनफळाचे प्रमाणित एकक खालील सारणीमध्ये दिले आहे.

आकृतीच्या भुजांच्या लांबीचे एकक	घनफळाचे प्रमाणित एकक
मिलिमीटर	1 घन मिलिमीटर किंवा 1 मिमी³
सेंटिमीटर	1 घन सेंटिमीटर किंवा 1 सेमी³
डेसीमीटर	1 घन डेसीमीटर किंवा 1 डेसिमी³
मीटर	1 घनमीटर किंवा 1मी³
डेकामीटर	1 घन डेकामीटर किंवा 1 डेकामी³
हेक्टोमीटर	1 घन हेक्टोमीटर किंवा 1 हेक्टोमी³
किलोमीटर	1 घन किलोमीटर किंवा 1 किमी³

घनफळाच्या प्रमाणित एककांमुळे घनफळाचे मापन सर्वत्र अचूक होते.

विविध बाबीच्या आकारमानाच्या व्यापकतेनुसार अर्थात लहान. मोठे आकारमान विचारात घेता त्रिमितीय आकृतीच्या भुजांच्या लांबीचे एकक वापरले जाते. ह्या अनुषंगाने प्रमाणित एकक संदर्भात घनफळ दिले जाते. उदा. एखाद्या इमारतीचे आकारमान 'घनमीटर' (किंवा मीटर^3) मध्ये दिले जाते.

अतिशय छोटी उपकरणे उदा. हातातील घड्याळाच्या विविध छोट्या भागांचे आकारमान घनमिलिमीटर (किंवा मिमी^{3}) मध्ये दिले जाते.

विविध एककानुसार घनफळांच्या प्रमाणित एकक सारणीतील संदर्भानुसार त्रिमितीय आकृतीचे घनफळ मोजण्यासाठी एकांक घनाचा (एकांक घन – Unit Cube) उपयोग केला जातो तसेच त्रिमितीय आकृतीचे घनफळ म्हणजे त्या आकृतीमध्ये '1 एकक × 1 एकक × 1 एकक' (घनफळाचे प्रमाणित एकक आकारमानाचे) मापाचे पूर्ण किंवा अपूर्ण किंवा दशांश अपूर्णांक स्वरुपात किती एकांक घन (Unit Cube) तयार होतात हे दर्शवणारी संख्या आहे.

त्रिमितीय आकृतीच्या घनफळाच्या अध्ययन अध्यापनात, कोणत्याही आकृतीचे घनफळ म्हणजे त्या आकृतीमध्ये 1 एकक × 1 एकक × 1 एकक आकाराचे पूर्ण अपूर्ण किंवा दशांश अपूर्णांक स्वरुपात तयार होणाऱ्या एकांक घनाची (Unit Cubes) संख्या आहे; हे सामान्यीकरण (Generalisation) स्वरुपात आकलन होणे अपरिहार्यच आहे.

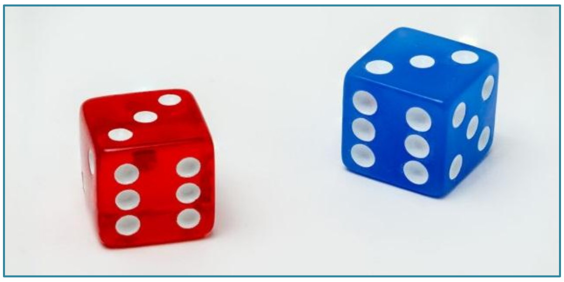
ह्या अनुषंगाने अर्थात आकृतीच्या घनफळासंदर्भात आकृतीमध्ये 1 एकक × 1 एकक × 1 एकक आकाराचे तयार होणारे एकांक घन (Unit Cubes) हे केवळ इष्टिकाचिती आणि घन, ह्या दोन प्रकारच्या त्रिमितीय आकृत्यांमध्ये दाखवता येतात. तसेच ह्या अनुषंगाने ह्या एकांक घनाची मोजदाद पण करता येते. कारण घन, इष्टिकाचिती आकृत्यांमध्ये आकृतीच्या सर्व कडा परस्परांना काटकोनात छेदतात.

ह्या अनुषंगाने येथे अशा घन किंवा इष्टिकाचिती ह्या पोकळ स्वरुपातील आकृत्या, ज्यामध्ये हे एकांक घन आकृतीच्या घनफळाच्या संख्येएवढे अगदी तंतोतंत सामावले जातात. हे कृती स्वरुपात पुढील भागात दर्शवले आहे. (येथे ही छायाचित्रे दर्शविली आहेत.) येथे प्रत्येक घन, इष्टिकाचिती आकृतीमधील एकांक घनाची मोजदाद करणे (अर्थात आकृतीच्या घनफळासंदर्भात) पण शक्य आहे. अन्य त्रिमितीय आकृत्या उदा. त्रिकोण चिती, त्रिकोण सूची, शंकू, वृत्तचिती, गोल, अर्धगोल..... इ. आकृत्या; अशा पोकळ स्वरुपातील आकृत्यांमध्ये '1 एकक × 1 एकक × 1 एकक' आकाराचे एकांक घन (Unit Cubes) तंतोतंत सामावले जाऊ शकत नाहीत. परंतु आकृतीच्या घनफळाच्या संदर्भातील सामान्यीकरण सर्वच आकृत्यांबाबत आहेच.

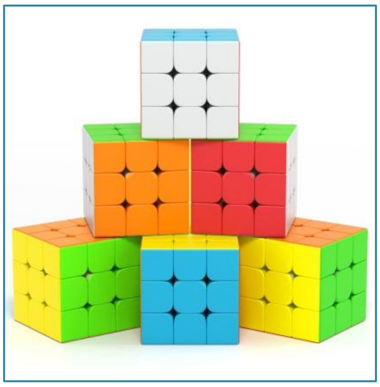
वरील विवेचनानुसार काही घन (घनाकृती) तसेच इष्टिकाचितीचे घनफळ 1 सेमी × 1 सेमी × 1 सेमी (सेंटिमीटर एकक संदर्भात घनफळाचे प्रमाणित एकक) आकाराच्या एकांक घनाच्या सहाय्याने स्पष्ट केले आहे. ही उदाहरणे पाहण्यापूर्वी घन ह्या आकृतीची व्यवहारातील काही उदाहरणे लक्षात घेणे क्रमप्राप्त ठरते. ह्या उदाहरणांच्या सहाय्याने ‘घन’ ह्या आकृतीची (किंवा घनाकृतीची) ठळक वैशिष्ट्ये लक्षात येतील.

‘घन आकार असणारी काही उदाहरणे खालीलप्रमाणे आहेत.

1) फासा (किंवा फासे) – DICE



2) रुबिक क्युब (Rubik’s Cube)



वरील उदाहरणावरून घनाकृतीची ठळक वैशिष्ट्ये खालीलप्रमाणे आहेत.

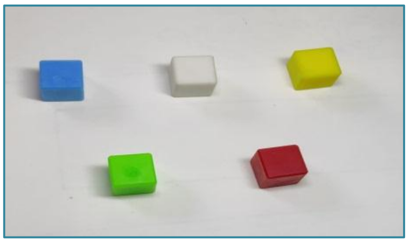
i. घनाकृतीला एकूण 6 पृष्ठभाग असतात आणि हे सर्व पृष्ठभाग चौरस असतात.

ii. घनाकृतीला एकूण 12 कडा (EDGES) असतात.

iii. सर्व कडांची लांबी (किंवा माप) समान असते. त्यामुळे घनाकृतीच्या 6 चौरस पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ पण समान असते.

iv. घनाकृतीला 8 शिरोबिंदू असतात.

खालील छायाचित्रात '1 सेमी × 1 सेमी 1 सेमी' आकाराचे एकांक घन (Unit Cubes) तसेच आकृतीच्या भूजांचे एकक सेंटिमीटर संदर्भात घनफळाचे प्रमाणित एकक दर्शवले आहेत.



पदार्थाची घनता

पदार्थाची घनता --- ग्रॅम प्रतिघनसेंटिमीटर (...ग्रॅम/सेमी^{3}) किंवा .... gm/cm^3 अशा स्वरुपात लिहितात. ह्या अनुषंगाने पदार्थाचे आकारमान हे वरील छायाचित्रात दर्शवल्याप्रमाणे अर्थात 1 सेमी^{3} किंवा 1 cm^3 असते.

आकारमान आणि धारकता

पाण्याची घनता 1 ग्रॅम/सेमी^{3} आहे.

पाण्याचे आकारमान 1 सेमी^{3} = 1 मिलिमीटर किंवा 1 cm^3 = Mililiter

हा मुख्य संदर्भ विशिष्ट भांड्याची धारकता मापन अर्थात भांड्यामध्ये किती पाणी (किंवा द्रव) मावेल? हे अचूकपने सांगण्यासाठी वापरला जातो.

विविध आकाराची भांडी उदा. घागर हंडा, पिंप, टाकी किंवा कोणतेही भांडे पूर्ण भरण्यासाठी जेवढे पाणी लागते ती त्या भांड्याची धारकता असते.

पाण्याचे आकारमान 1 cm^3 = 1 ml

ह्या अनुषंगाने 1000 cm^3 = 1000 ml

= 1 liter

त्रिमितीय आकृतीचे घनफळ (विविध आकाराची भांडी, टाकी इ.) हे त्या आकृतीचे आकारमान (विविध आकाराची भांडी, टाकी इ.) आहे आणि वरील संदर्भानुसार त्रिमितीय आकृतीचे धारकता मापन केले जाते.

2.5 काही घनाकृतींचे घनफळ

'घनाकृती' किंवा 'घन' ह्या त्रिमितीय आकृतीची लांबी,रुंदी, ऊंची समान असून आकृतीला 12 कडा, 8 शिरोबिंदू आणि 6 (समान क्षेत्रफळ असणारे) पृष्ठभाग असतात. घनाकृतीच्या सर्व कडा एकमेकांना काटकोनात छेदतात. ह्या अनुषंगाने घनाकृतीच्या घनफळाचे सूत्र (बाजू)^3 किंवा बाजू × बाजू × बाजू आहे.

घनाकृतीचे घनफळ स्पष्ट करण्यासाठी ह्या घनाकृती किंवा घन पोकळ स्वरुपात असून घनाकृतीमध्ये 1 सेमी × 1 सेमी × 1सेमी (आकृतीच्या भुजांची लांबी किंवा मापे एकांक घन (Unit Cubes) आकृतीच्या प्राप्त घनफळ संख्ये एवढे किंवा संख्येइतके तंतोतंत बसतात.

(हे छायाचित्राच्या स्वरुपात दर्शविले आहे.)

1)

घनाकृतीची बाजू = 2 सेमी

घनफळ = बाजू × बाजू × बाजू

= 2 सेमी × 2 सेमी × 2 सेमी

= 8 सेमी^{3} किंवा घनसेंटिमीटर

2)

घनाकृतीची बाजू = 3 सेमी

घनफळ = 3 सेमी × 3 सेमी × 3 सेमी

= 27 सेमी^{3} किंवा घसेमी

3)

घनाकृतीची बाजू = 4 सेमी
घनफळ = 4 सेमी × 4 सेमी × 4 सेमी
= 64 सेमी^{3} किंवा घसेमी

4)

घनाकृतीची बाजू = 5 सेमी
= 125 सेमी^{3} किंवा घसेमी

2.6 काही इष्टिकाचितीचे घनफळ

घनाकृतीप्रमाणेच इष्टिकाचितीला 8 शिरोबिंदू, 12 कडा आणि 6 पृष्ठभाग असतात. परंतु घनाकृतीची लांबी, रुंदी आणि ऊंची समान असते. ह्या अनुषंगाने इष्टिकाचितीची लांबी, रुंदी आणि ऊंची वेगवेगळी असते. त्यामुळे इष्टिकाचितीच्या घनफळाचे सूत्र लांबी × रुंदी × ऊंची असे आहे. येथे हा उल्लेख करणे पण आवश्यकच आहे, 'लांबी × रुंदी' ह्या गुणाकारासंदर्भात इष्टिकाचितीच्या तळाचे क्षेत्रफळ मिळते. त्यामुळे इष्टिकाचितीची किंवा अन्य सुसम त्रिमितीय आकृतीचे घनफळाचे सूत्र हे 'तळाचे क्षेत्रफळ × ऊंची' असे पण लिहिता येते.

1) ह्या छायाचित्रातील इष्टिकाचितीची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी आणि ऊंची 9 सेमी आहे.


घनफळ = लांबी × रुंदी × ऊंची

= 3 सेमी × 2 सेमी × 9 सेमी

= 54 सेमी³ किंवा घसेमी

2) ह्या इष्टिकाचितीची लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी, ऊंची 5 सेमी आहे.


घनफळ = 3 सेमी × 2 सेमी × 5 सेमी

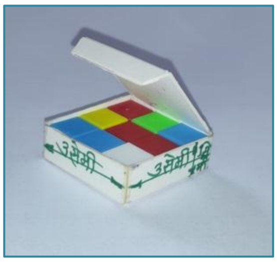
= 30 सेमी³ किंवा घसेमी

3) इष्टिकाचितीची मापे खालीलप्रमाणे आहेत. लांबी 2 सेमी, रुंदी 2 सेमी, ऊंची 4 सेमी


घनफळ = 2 सेमी × 2 सेमी × 4 सेमी

= 16 सेमी³ किंवा घसेमी

4) ही इष्टिकाचिती नाही परंतु छोट्या आकाराची पेटी आहे. ह्या आकृतीची मापे खालीलप्रमाणे आहेत.



लांबी 3 सेमी, रुंदी 3 सेमी, ऊंची 1 सेमी

घनफळ = 3 सेमी × 3 सेमी × 1 सेमी

= 9 सेमी^{3} किंवा घसेमी

5) आकृतीची मापे खालीलप्रमाणे आहेत.

लांबी 3 सेमी, रुंदी 2 सेमी, ऊंची 1 सेमी

घनफळ = 3 सेमी × 2 सेमी × 1 सेमी

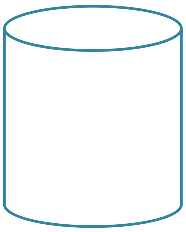
= 6 सेमी^{3} किंवा घसेमी

वरील घनाकृती आणि इष्टिकाचितीच्या घनफळाच्या उदाहरणावरून, आकृतीचे घनफळ म्हणजे आकृतीमध्ये ‘1 एकक × 1 एकक × 1 एकक’ (घनफळाच्या प्रमाणित एकक आकाराचे) एकांक घन (Unit Cubes) दर्शवणे तसेच ह्या एकांक घनाची मोजदाद करणे पण शक्य झाले. पण इष्टिकाचितीची आणि घन या त्रिमितीय आकृत्यांमध्ये प्रत्येकी दोन बाजू परस्परांना काटकोनात छेदतात. त्यामुळे हे एकांक घन पोकळ स्वरुपातील आकृतीमध्ये हे दर्शवता आले आणि आकृतीच्या घनफळासंदर्भात एकांक घनाची मोजदाद करणे पण शक्य होते. अशा स्वरुपाच्या अन्य आकृत्यांमध्ये उदा. वृत्तचिती, गोल .... इ. मध्ये एकांक घन पोकळ आकृतीमध्ये तंतोतंत बसू शकत नाहीत तसेच ह्या अनुषंगाने त्यांची मोजदाद पण करणे शक्य होत नाही.

उदा. खालील वृत्तचितीचे घनफळ विचारात घेऊ

वृत्तचितीची त्रिज्या = 1.25 सेमी

वृत्तचितीचे घनफळ = π (त्रिज्या)^2 × h



= $\frac{22}{7}$× (1.25 सेमी)^2 × 3 सेमी

= 3.14 × (1.25 सेमी)^2 × 3 सेमी

= 14.71875

= 14.72 सेमी^{3} किंवा घसेमी

सारांश

एखाद्या त्रिमितीय आकृतीने अवकाशातील व्यापलेल्या जागेला त्या त्रिमितीय आकृतीचे घनफळ असे म्हणतात.

महत्त्वमापन पाठातील विविध आकृत्यांच्या घनफळाची सूत्रे, विशेष करून त्या सूत्रातील समान स्वरूपाचा किंवा सामाईक भाग; आकृतीच्या भुजांची लांबी एककासह गुणाकार स्वरुपात तीन वेळा पाहायला मिळते. ह्या अनुषंगाने घनफळ हे 'घन एकक' असे दिले जाते.

सर्व त्रिमितीय आकृत्यांच्या घनफळाबाबत सामान्यीकारण (Generalisation) ____ 'आकृतीचे घनफळ हे; त्या आकृतीमध्ये '1 एकक × 1 एकक × 1 एकक' (घनफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे घन) आकाराचे पूर्ण, अपूर्ण किंवा दशांश अपूर्णांक स्वरुपात तयार होणाऱ्या एकांक घनाची (Unit Square) संख्या आहे'.

ह्या अनुषंगाने त्रिमितीय आकृतीच्या घनफळासंदर्भात पोकळ स्वरुपातील घन (किंवा घनाकृती) आणि इष्टिकाचिती आकृत्यांमध्ये '1 एकक × 1 एकक × 1 एकक' (घनफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे) आकाराचे एकांक घन (Unit Cubes) दर्शवणे तसेच ह्या एकांक घनांची मोजदाद करणे पण शक्य आहे. ह्या संदर्भानुसार काही घन आणि इष्टिकाचितींचे घनफळ स्पष्ट केले आहे. अन्य त्रिमितीय आकृत्या उदा. त्रिकोण चिती, त्रिकोण सूची, शंकू, गोल, अर्धगोल, वृत्तचिती, ...इ. आकृत्यांमध्ये (पोकळ स्वरुपात) '1 एकक × 1 एकक × 1 एकक' आकाराचे एकांक घन तंतोतंत बसू शकत नाही. त्यामुळे आकृतीच्या घनफळासंदर्भात एकांक घनाची मोजदाद करणे शक्य होत नाही परंतु घनफळाबाबतचे सामान्यीकरण (Generalisation) सर्व आकृत्यांबाबत आहेच.

3. पृष्ठफळ

महत्त्वमापन पाठामध्ये विविध त्रिमितीय आकृतीच्या पृष्ठफळांची सूत्रे आहेत.

कोणत्याही त्रिमितीय आकृतीचे पृष्ठफळ म्हणजे त्या त्रिमितीय आकृतीच्या सर्व पृष्ठभागाचे एकूण क्षेत्रफळ आहे.

ह्या अनुषंगाने आकृतीच्या पृष्ठफळाच्या सूत्रामध्ये विशिष्ट द्विमितीय आकृतीच्या क्षेत्रफळाच्या सूत्राचा समावेश पाहायला मिळतो. त्रिमितीय आकृतीमध्ये अशा समान स्वरूपाचे किती पृष्ठभाग आहेत. त्यानुसार आकृतीच्या पृष्ठफळाच्या सूत्रामध्ये सहगुणक असतात. ह्या सोबतच त्रिमितीय आकृतीमध्ये अन्य स्वरूपाचे त्रिमितीय आकार आणि त्यानुसार त्या आकृतीचे क्षेत्रफळाचे सूत्रही त्रिमितीय आकृतीच्या पृष्ठफळाच्या सूत्रामध्ये सामाविष्ट केलेले असते.

विशिष्ट त्रिमितीय आकृतीमध्ये किती पृष्ठभाग असतात? ह्या पृष्ठभागांचा द्विमितीय आकार कोणता? हे माहीत होण्यासाठी त्रिमितीय आकाराची घडण (Net) किंवा घडणी (Nets) पाहायला हवी.

घडणी (Nets)

वरील संदर्भानुसार विशिष्ट त्रिमितीय आकृती कशा पद्धतीने किंवा कशा प्रकारे विकसित झाली किंवा तयार केली; हे पाहाण्यासाठी त्रिमितीय आकृतीच्या कडा कापून सपाट करून पाहिल्या तर आकृतीचे सर्व पृष्ठभाग दिसतील. ही आकृतीची घडण आहे.

काही त्रिमितीय आकृतीची घडण आणि त्या आकृतीचा पृष्ठफळाबाबत माहिती घेऊ.

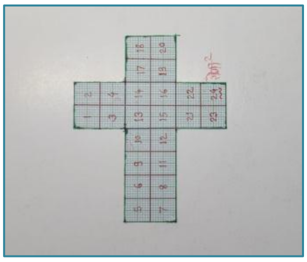
घन किंवा घनाकृती (CUBE)

घन किंवा घनाकृतीची लांबी, रुंदी, उंची समान असते. आकृतीमध्ये एकूण 8 शिरोबिंदू, 12 कडा आणि 6 पृष्ठभाग असतात. हे सर्व पृष्ठभाग समान क्षेत्रफळाचे असून वर्गाकार किंवा चौरस असतात.

चौरसाचे क्षेत्रफळ = $(\text{बाजू})^2$

घनाकृतीमध्ये एकूण 6 समान क्षेत्रफळाचे चौरस असतात. त्यामुळे घनाकृतीच्या पृष्ठफळाचे सूत्र $6\times(\text{बाजू})^2$ आहे. ह्या संदर्भात काही उदाहरणे पाहू.

1) घडणी तसेच पृष्ठफळ



घनाकृतीची बाजू = 2 सेमी [घडण]

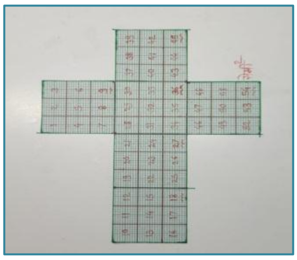
घनाचे पृष्ठफळ = $6\times(\text{बाजू})^2$

$= 6\times(2\ \text{सेमी})^2$

$= 6\times4\ \text{सेमी}^2$

$= 24\ \text{सेमी}^2$

2)

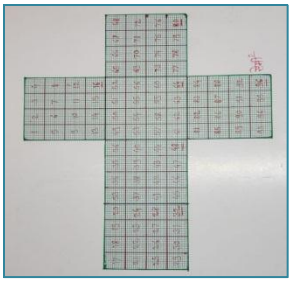
घनाकृतीची बाजू = 3 सेमी [घडण]

घनाचे पृष्ठफळ = $6\times(3$ सेमी$)^2$

$= 6\times9$ सेमी^{2}

$= 54$ सेमी^{2}

3)

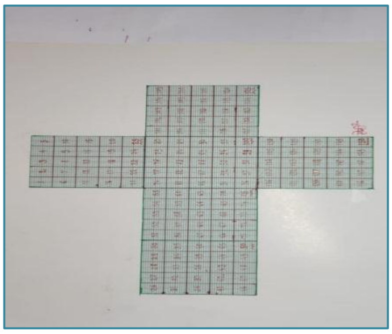
घनाकृतीची बाजू = 4 सेमी

घनाचे पृष्ठफळ = $6\times(4$ सेमी$)^2$

$= 6\times16$ सेमी^{2}

$= 96$ सेमी^{2}

4)

घनाकृतीची बाजू = 5 सेमी

घनाचे पृष्ठफळ = $6\times(5$ सेमी$)^2$

$= 6\times25$ सेमी^{2}

$= 150$ सेमी^{2}

इष्टिकाचिती (CUBOID)

इष्टिकाचितीच्या बाजूंची मापे अर्थात लांबी (ℓ), रुंदी(b), उंची(h) वेगवेगळी असते. इष्टिकाचितीला पण 8 शिरोबिंदू, 12 कडा तसेच 6 पृष्ठभागांचे क्षेत्रफळ समान नसते. हे पृष्ठभाग आणि त्या पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ खालीलप्रमाणे आहेत.

i. पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ (पृष्ठभाग क्र.1) = लांबी (ℓ), रुंदी(b)

$= \ell \times b$

इष्टिकाचितीमध्ये हे 2 पृष्ठभाग आहेत, त्यामुळे दोन पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ = $2\ (\ell \times b)$

ii. पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ (पृष्ठभाग क्र.2) = रुंदी(b) × उंची(h)

$= b \times h$

दोन पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ = 2 (($b\times h$)

iii. पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ (पृष्ठभाग क्र.3) = लांबी (ℓ) × उंची(h)

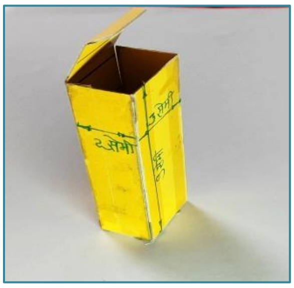
$= \ell \times h$

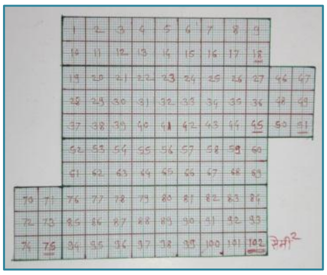
दोन पृष्ठभागाचे क्षेत्रफळ = $2\ (\ell \times h)$

∴ इष्टिकाचितीचे एकूण क्षेत्रफळ = 2 ($\ell \times b$) + 2 ($b \times h$) + 2 ($\ell \times h$)

= 2 [($\ell \times b$) + ($b \times h$) + ($\ell \times h$)]

ह्या संदर्भात काही उदाहरणे पाहू





बाजूच्या इष्टिकाचितीच्या कडा कापून सपाट करून पहिल्या तर खालील आकृतीत दर्शवल्याप्रमाणे सर्व पृष्ठभाग दिसतील ही इष्टिकाचितीची घडण आहे.

इष्टिकाचितीची लांबी (ℓ) = 3 सेमी

इष्टिकाचितीची रुंदी (b) = 2 सेमी

इष्टिकाचितीची उंची (h) = 9 **सेमी**

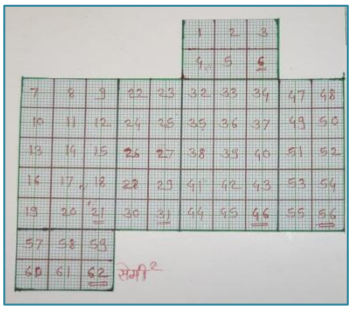
इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ = 2 ($\ell \times b$) + ($b \times h$) + ($\ell \times h$)

= 2 (3 सेमी^{2} × 2 सेमी + 2 सेमी × 9 सेमी + 3 सेमी × 9 सेमी)

= 2 (6 सेमी^{2} + 18 सेमी^{2} + 27 सेमी^{2})

= 2 (51 सेमी^{2})

= 102 सेमी



इष्टिकाचितीची लांबी (ℓ) = 3 सेमी

इष्टिकाचितीची रुंदी (b) = 2 सेमी

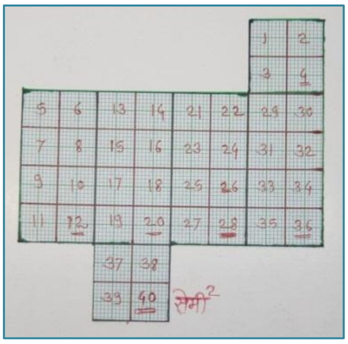
इष्टिकाचितीची उंची (h) 5 सेमी

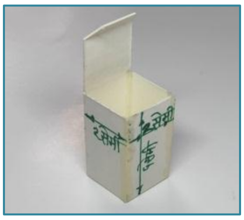
इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ = 2 (3 सेमी × 2 सेमी + 2 सेमी × 5 सेमी + 3 सेमी × 5 सेमी)

= 2(6 सेमी^{2} + 10 सेमी^{2} + 15 सेमी^{2})

= 2 (31 सेमी^{2})

= 62 सेमी^{2}





इष्टिकाचितीची लांबी = 2 सेमी

इष्टिकाचितीची रुंदी = 2 सेमी

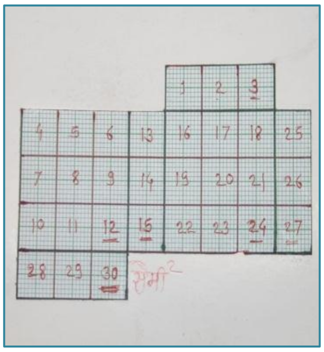
इष्टिकाचितीची उंची = 4 सेमी

इष्टिकाचितीचे पृष्ठफळ = 2 (2 सेमी × 2 सेमी + 2 सेमी × 4 सेमी + 2 सेमी × 4 सेमी)

= 2(4 सेमी^{2} + 8 सेमी^{2} + 8 सेमी^{2})

= 2 (20 सेमी^{2})

= 40 सेमी^{2}




ही इष्टिकाचिती नाही, छोट्या आकाराची चौकोनी पेटी आहे. ह्या आकृतीची लांबी (ℓ), रुंदी(b), आणि उंची (h) 1 सेमी आहे. ह्या अनुषंगाने ह्या आकृतीचे पृष्ठफळ

= 2 (3 सेमी × 3 सेमी + 3 सेमी × 1 सेमी + 3 सेमी × 1 सेमी)

= 2(9 सेमी^{2} + 3 सेमी^{2} + 3 सेमी^{2})

= 2 (15 सेमी^{2})

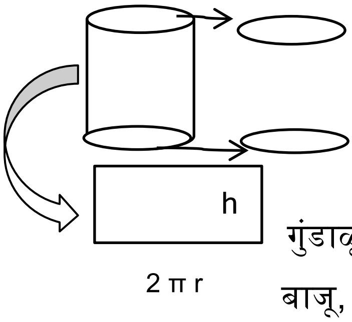
= 30 सेमी^{2}

घन आणि इष्टिकाचिती; ह्या आकृत्यांना प्रत्येकी 6 पृष्ठभाग असतात तसेच हे पृष्ठभाग चौरस, आयत असतात. त्यामुळे आकृतीचे पृष्ठफळ अर्थात आकृतीच्या सर्व पृष्ठभागाचे एकूण क्षेत्रफळासंदर्भात आकृतीच्या पृष्ठभागावर तयार होणारे '1एकक × 1एकक' आकाराचे (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक) एकांक चौरस दर्शवता येतात. त्यामुळे ह्या एकांक चौरसांची मोजदाद करणे शक्य आहे. त्याबाबत खूप सविस्तर स्पष्टीकरण 'क्षेत्रफळ : संकल्पना' ह्या प्रकरणामध्ये पाहिले आहे. परंतु अन्य त्रिमितीय आकृत्यामध्ये पृष्ठफळासंदर्भात हे एकांक चौरस आकृतीच्या सर्वच पृष्ठभागावर दर्शवणे शक्य होत नाही.

उदा. गोलाचे पृष्ठफळ, वृत्तचितीचे पृष्ठफळ, त्रिकोण चितीचे पृष्ठफळ ..... इ.

खालील आकृतीमध्ये दर्शवलेल्या वृत्तचितीच्या पृष्ठफळासंदर्भात वृत्तचितीची घडण पाहू.

वृत्तचितीचा तळ आणि वरील भाग वर्तुळाकार किंवा वर्तुळ आहे. ह्या वर्तुळांची त्रिज्या 'r' विचारात घेऊन दोन वर्तुळाचे क्षेत्रफळ = 2 π r^2



ह्यासोबतच वृत्तचितीचे वक्रपृष्ठफळ (वृत्तचितीभोवती एक पेपर गुंडाळून तो सपाट करून पाहिला तर आयत मिळतो. ह्या आयताची एक बाजू, 2 π r आणि दुसरी बाजू वृत्तचितीची उंची आहे.) घडण स्वरुपात आयत मिळतो. ह्या आयताचे क्षेत्रफळ 2 π r × h आहे.

∴ वृत्तचिती पृष्ठफळ = 2 π r^2 + 2 π r h

= 2 π r (r + h)

सारांश

आकृतीचे पृष्ठफळ हे आकृतीच्या सर्व पृष्ठभागाचे एकूण क्षेत्रफळ आहे. ह्या अनुषंगाने घन तसेच इष्टिकाचितीच्या पृष्ठफळासंदर्भात, पृष्ठभागावर तयार होणारे एकांक चौरस (क्षेत्रफळाचे प्रमाणित एकक आकाराचे चौरस) दर्शवणे तसेच त्या चौरसांची मोजदाद करणे शक्य आहे. अन्य त्रिमितीय आकृत्या उदा. गोल, त्रिकोण चिती, वृत्तचिती.....इ. आकृत्यांच्या पृष्ठफळासंदर्भात पृष्ठभागावर तयार होणारे एकांक चौरस (Unit Squares) दर्शवणे शक्य होत नाही. परंतु पृष्ठफळ हे क्षेत्रफळच आहे. त्या अनुषंगाने सर्वच आकृत्यांचे पृष्ठफळ हे त्या आकृतीच्या पृष्ठभागावर तयार होणाऱ्या एकांक चौरसांची संख्या आहे.

4. एकक रूपांतरण (UNIT CONVERSION)

क्षेत्रफळ, घनफळावर उदाहरणांच्या उकल प्रक्रियेमध्ये आकृतीच्या सर्व भुजांची मापे ही एकाच एककामध्ये (उदा. सर्व भुजांची मापे मीटर) असणे अपरिहार्यच आहे. काही अन्य उदाहरणांमध्ये विविध एककांमध्ये देण्यात आलेली मापे आवश्यकतेनुसार एका विशिष्ट एककामध्ये रूपांतरित करावे लागतात. ह्या विविध एककांच्या रूपांतरणाबाबत अर्थात एककाचे रूपांतरण सुलभ पद्धतीने करण्याबाबत माहिती घेऊ.

दशमान परिमाणे ही क्रमानुसार 10 च्या पटीत वाढतात किंवा कमी होतात. ही परिमाणे अनुक्रमे मिली (सर्वात लहान), सेंटि, डेसी, मीटर (किंवा वस्तुमान संदर्भात ग्राम आणि धारकता संदर्भात लीटर), डेका, हेक्टो, किलो (सर्वात मोठे) आहेत. ह्या एकूण सात एककांचे रूपांतरण करण्यासाठी खालील सारणी खूपच उपयुक्त आहे.

एकक	मिली	सेंटि	डेसी	मीटर	डेका	हेक्टो	किलो
मिली	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
सेंटि	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
डेसी	10^{-2}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
मीटर	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
डेका	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-1}	10^{-2}
हेक्टो	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1	10^{-1}
किलो	10^{6}	10^{5}	10^{4}	10^{3}	10^{2}	10	1

वरील सारणीचा उपयोग करून विविध एककांचे रूपांतरण खूपच सुलभ पद्धतीने करता येते.

रूपांतरण गुणक (Conversion Factor)

विविध एककांचे रूपांतरण करण्यासाठी ‘रूपांतरण गुणक’ (Conversion Factor) खूपच महत्वपूर्ण आहे.

‘रूपांतरण गुणका’ च्या सहाय्याने विविध एककांचे रूपांतरण करणे शक्य होते.

वरील सारणीचा उपयोग करून आवश्यकतेनुसार ‘रूपांतरण गुणक’ (Conversion Factor) लिहिता येतो. ह्या अनुषंगाने ही सारणी आडव्या ओळीच्या स्वरुपात किंवा उभ्या स्तंभाच्या स्वरुपात, अशा दोन्ही पद्धतीने वापरता येते.

सारणीमध्ये प्रत्येक आडव्या ओळीमध्ये किंवा उभ्या स्तंभामध्ये '1' ही संख्या आहे. एकक रूपांतरण करण्यासाठी 'रूपांतरण गुणक' लिहिताना प्रत्येक आडव्या ओळीतील किंवा उभ्या स्तंभातील '1' ही संख्या लक्षात घेणे क्रमप्राप्त आहे.

विविध एककांचे रूपांतरण करण्यासंदर्भात काही उदाहरणे सोडवून दाखवली आहेत. (येथे 'रूपांतरण गुणक' ठरवण्यासाठी किंवा माहिती घेण्यासाठी ही सारणी आडव्या ओळीच्या स्वरुपात विचारात घेतली आहे.)

1) 41.25 मीटर = ? डेसिमीटर

हे रूपांतरण करण्यासाठी 'रूपांतरण गुणक' अर्थात 1 मीटर = ? डेसिमीटर, हे सारणीच्या सहाय्याने खालीलप्रमाणे लिहिता येईल.

सारणीतील ओळ क्र. 3 मध्ये मीटर ह्या एककाच्या स्तंभामध्ये 1 हा अंक आहे आणि 1 ह्या अंकाच्या डावीकडे डेसिमीटर ह्या एककाच्या स्तंभामध्ये 10 ही संख्या आहे. ह्या अनुषंगाने रूपांतरण गुणक खालील प्रमाणे प्राप्त होईल.

1 मीटर = 10 डेसिमीटर

∴ 41.25 मीटर = 41.25 × 10 डेसिमीटर

41.25 मीटर = 412.5 डेसिमीटर

2) 41.25 मीटर = ? किमी

सारणीतील ओळ क्र 3 मध्ये मीटर ह्या एककाच्या स्तंभामध्ये 1 हा अंक आहे आणि 1 ह्या संख्येच्या उजवीकडे किलोमीटर ह्या एककाच्या स्तंभामध्ये 10^{-3} किंवा 0.001 ही संख्या आहे. ह्या अनुषंगाने रूपांतरण गुणक खालीलप्रमाणे प्राप्त होईल.

1 मीटर = 0.001 किमी

∴ 41.25 मीटर = 41.25 × 0.001 किमी

41.25 मीटर = 4.125 × 0.01 किमी

41.25 मीटर = 0.4125 × 0.1 किमी

41.25 मीटर = 0.04125 किलोमीटर

3) 8.2 सेमी = ? डेकामीटर

वरील सारणीतील ओळ क्र.2 मध्ये सेंटिमीटर ह्या एककाच्या स्तंभामध्ये 1 हा अंक आहे आणि 1 अंकाच्या उजवीकडे डेकामिटर ह्या एककाच्या स्तंभामध्ये 10^{-3} किंवा 0.001 ही संख्या आहे. ह्या अनुषंगाने रूपांतरण गुणक खालीलप्रमाणे प्राप्त होईल.

1 सेमी = 0.001 डेकामीटर

∴ 8.2 सेमी = 8.2 × 0.001 डेकामीटर

8.2 सेमी = 0.82 × 0.01 डेकामीटर

8.2 सेमी = 0.082×0.1 डेकामीटर

8.2 सेमी = 0.0082 डेकामीटर

4) 0.225 किमी = ? डेसिमीटर

वरील सारणीतील ओळ क्र. 7 मध्ये किलोमीटर ह्या एककाच्या स्तंभामध्ये 1 हा अंक आहे आणि 1 ह्या संख्येच्या डावीकडे डेसिमीटर ह्या एककाच्या स्तंभामध्ये 10^4 किंवा 10000 ही संख्या आहे. ह्या अनुषंगाने रूपांतरण गुणक खालीलप्रमाणे प्राप्त होईल.

1 किमी = 10000 डेसिमीटर

$\therefore$ 0.225 किमी = 0.225 × 10000 डेसिमीटर

0.225 किमी = 2.25 × 1000 डेसिमीटर

0.225 किमी = 22.5 × 100 डेसिमीटर

0.225 किमी = 225×10 डेसिमीटर

0.225 किमी = 2250 डेसिमीटर

वरील प्रकारे विविध एककांचे रूपांतरण खूपच सुलभ पद्धतीने करता येते.

*****

संदर्भ ग्रंथ सूची

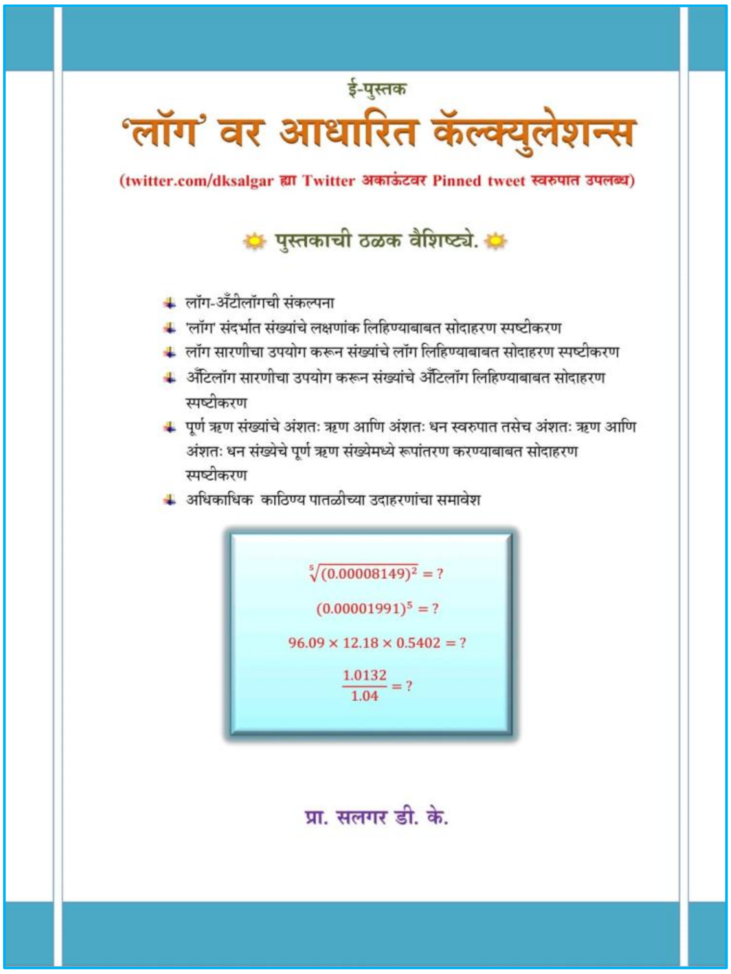
i. राज्य शैक्षणिक संशोधन व प्रशिक्षण परिषद महाराष्ट्र, पुणे (प्रथम आवृत्ती फेब्रुवारी 2024) शिक्षक मार्गदर्शिका

ii. मनोरमा प्रकाशन, मुंबई – 400114 (अष्टमावृत्ती : मार्च 2014) लेखक:शशि बेडेकर, गणितातील चुका कशा टाळाल?

iii. महाराष्ट्र राज्य साहित्य संस्कृति मंडळ, मुंबई – 400012 (प्रथम प्रकाशन – जुलै 1973) परिभाषासंग्रह (मराठी-इंग्रजी व इंग्रजी-मराठी)

iv. महाराष्ट्र राज्य पाठ्यपुस्तक निर्मिती अभ्यासक्रम संशोधन मंडळ, पुणे – 411004 गणित इ. चौथी (प्रथम आवृत्ती 2014), गणित इ. पाचवी (प्रथम आवृत्ती 2015), गणित इ. सहावी (प्रथम आवृत्ती 2016), गणित इ. सातवी (प्रथम आवृत्ती 2017), गणित इ. आठवी (प्रथम आवृत्ती 2018)

‘लॉग वर आधारित कॅल्क्युलेशन्स’



(पुस्तक डाऊनलोड करण्यासाठी लिंक)

https://bit.ly/LogBasedCalculationbyDKSv2